现代数学丛书

陈恕行 著

# 偏微分方程的奇性分析

# ANALYSIS OF SINGULARITIES FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

CHEN SHUXING

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

# 偏微分方程的奇性分析

陈恕行 著

上海科学技术出版社

Modern Mathematics Series

# ANALYSIS OF SINGULARITIES FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Chen Shuxing

Shanghai Scientific & Technical Publishers

责任编辑　赵序明

·现代数学丛书·
偏微分方程的奇性分析
陈恕行　著
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所经销 常熟市第四印刷厂印刷
南京理工排版校对公司照排
开本787×1092　小1/16　印张18　插页4　字数231 000
1998年11月第1版　1998年11月第1次印刷
印数1—1 200
ISBN 7-5323-4782-6/O·218
定价：34.20元

## 内 容 提 要

本书系统地介绍偏微分方程的奇性分析理论，并侧重于非线性方程奇性分析问题的研究. 全书共分七章. 第 1 章先从奇性分析的经典理论入手. 第 2 章主要讨论线性方程的情形，包括奇性传播与奇性反射问题. 从第 3 章到第 6 章讨论非线性方程奇性分析的各个侧面，其中包括解的弱奇性与强奇性的传播、反射与干扰，扇状奇性结构与花状奇性结构的研究等. 方程的类型也涉及半线性、拟线性和完全非线性方程. 第 7 章介绍拟线性方程的奇性形成问题. 全书内容对于偏微分方程奇性分析研究的发展、主要理论与方法，以及最新进展给出了一个全面的介绍. 本书可供高等学校数学系高年级学生，研究生以及有关的科研人员参考.

**Analysis of Singularities for**
**Partial Differential Equations**

Chen Shuxing

Abstract

The theory on analysis of singularities for partial differential equations is systematically discussed in this book. Particularly, the study on the problems of analysis of singularities for nonlinear equations is concerned. The book contains seven chapters. The first chapter starts with the classical theory of analysis of singularities. Then Chapter 2 mainly discusses the case of linear equations, including propagation of singularities and reflection of singularities. The analysis of singularities for nonlinear equations are discussed from Chapter 3 to Chapter 6, where the propagation, reflection and interaction of weak singularities or strong singularities, and the singularity structure with different shape are discussed respectively. The related equations involve semilinear, quasilinear and fully nonlinear equations. Finally, in Chapter 7 the problem on formation of singularities for quasilinear equations is discussed. The whole book gives an overall introduction for the main theory and methods of analysis of singularities, as well as its recent development and progress. The book can be served as a reference book for graduate students, senior undergraduate students and related scientists.

# 出版说明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价. 原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念. 由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量. 考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员. 编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》,我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导,并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

# 引　言

在偏微分方程的理论和应用研究中,人们不仅关心一个偏微分方程或者其相应的定解问题是否有解,还往往更关心解的性质,例如解的正则性、周期性、渐近行为等等.而其中最重要的莫过于对解的正则性的了解,这是因为:

一、解的正则性告诉我们这个解是否是连续的、光滑的.如果是,那么解在一点的数值就可以代表它在该点邻近的数值.这对于定量地了解这个解,或者进行数值计算将有很大的好处.而且解的正则性通常也是研究解的其他性质,例如解的渐近行为的基础.

二、在现代偏微分方程理论研究中,人们往往将一个问题的解的存在性的证明分解成两步;第一步证明在很弱意义下(例如在分布的意义下)解的存在性,然后说明这个解就是经典意义的解;后一步的工作实际上就是对解的正则性的讨论.

三、解的正则性的反面表述就是解的奇性,而解的奇性的产生与它的分布往往是种种应用问题中所特别关心的.例如,在材料力学中,最令人关心的问题经常是应力集中或材料出现裂痕处的应力与应变状态;在化学反应问题中,解的奇性的产生往往对应于爆炸的产生;在研究空气动力学问题中,解的奇性的形成往往对应于冲击波的生成等等.特别是在波的传播问题中,解的奇性描述了波阵面,所以解的奇性的分布正可描述波的位置或波的传播过程.这些正是人们最关心的问题.

进一步的研究还发现,解的正则性与解的其他性质,以及解是

否存在、唯一等问题有密切的联系. 偏微分方程解的正则性往往用一些不等式,即所谓正则性估计来表述,而这些估计式在解的存在性与唯一性的讨论中也往往是至关重要的. 用泛函分析为工具来讨论偏微分方程时一般总得先规定一个解所属的空间,这个空间实际上就蕴含了解所应具有的某种正则性.

很多关于偏微分方程的专著中都有关于解的正则性和奇性的讨论,但是专门论述这一问题的书还不多见,本书特别强调这一问题的重要性,将集中地介绍近年来关于偏微分方程解的正则性与奇性的研究成果,希望它能有助于人们了解这类问题的研究概貌与主要方法,为进入研究的前沿作准备. 考虑到在研究偏微分方程解的正则性问题时,人们实际上更关心的是解的奇性的出现与分布,所以将本书定名为《偏微分方程的奇性分析》. 由于双曲型方程(组)主要描述波的传播现象,与其他各类型的方程相比,对于它的解的奇性分析的研究一般包含更丰富的内容,故以后我们将较多地涉及对双曲型方程的讨论,但由于篇幅所限,对于解出现奇性以前的性质,例如发展型方程解的生命区间的估计等问题,在此暂不涉及.

本书第 1 章从奇性分析的经典理论入手开始讨论,虽然在偏微分方程的经典理论中,关于解的奇性分析只有一些简单的结果,但它是今后深入讨论的基础与出发点. 自从本世纪 60 年代微局部分析理论建立与发展以后,偏微分方程的奇性分析理论方才成为一个专门的分支. 从第 2 章开始,就逐步展开对各个专题的讨论. 其中第 2 章主要讨论线性方程的情形,包括在区域内部解的奇性传播与在边界上解的奇性反射. 由于非线性方程的奇性分析比线性方程的情形更复杂,内容也更丰富,因此,从第 3 章开始,介绍非线性方程奇性分析研究的各个侧面,涉及到弱奇性与强奇性的传播、反射与干扰、扇状奇性结构与花状奇性结构的研究等各类问题. 在讨论这些问题时,对于半线性方程与一般非线性方程,所用的处理方法是完全不同的. 最后,在第 7 章,特别介绍拟线性方程的奇性形成问题. 虽然目前对这个问题的系统研究成果较少,但我

们相信此类研究不久将有较快的发展.

偏微分方程的奇性分析理论的研究涉及很多现代分析工具,微局部分析的许多基本知识对本书所讨论的问题都是需要的.由于本书篇幅所限,当然不可能对此全部加以介绍.在本书中对这些内容作了不同的处理.由于拟微分算子的基本理论已在许多偏微分方程的著作中有介绍,并为人们所熟悉,故在本书中不再详细地叙述其基本理论,而是直接应用有关的结果.对于仿微分算子的理论,则在附录中作一扼要的回顾.对于二次微局部分析理论,将在第 4 章中作较详细的介绍.

由于近二三十年中偏微分方程奇性分析理论的迅速发展,与该方向有关的成果与文献极为丰富,方法各异.为了使读者了解该理论的核心思想与发展的主要线索,我们只能对部分典型问题作详细的叙述与证明.有些问题虽然重要,所得到的结果也很精彩,但由于其证明技巧性很强,往往为解决一个问题就需要作许多技术上的准备,因而无法在本书有限的篇幅中展开.对此,我们只能简单地介绍在这些方面已取得的结果与进展,甚至不得不割爱.此外,我们强调指出,对于偏微分方程解的奇性的研究是有明确的实际背景的,虽然由于现代分析工具的引入,使有些问题的提法与结论显得较为抽象.因此,在本书中将提供一些对一般结论的解释以及对一些实例的讨论,希望它能有助于读者对理论实质的理解与对一般结论应用的兴趣.为了便于阅读,在介绍一些已有成果时,本书对很多材料作了重新的处理.其中也包含了作者本人近年来的部分研究成果.由于作者的知识与水平所限,本书有许多不妥之处,恳切希望读者指正.

在本书出版之际,作者借此机会对导师谷超豪教授多年的指导与关心表示由衷的感谢,本书的写成也是导师长期教导的结果.作者还深深感谢周围许多老师和同行们在学习与研究偏微分方程理论中所给予的指导与帮助,其中特别是王柔怀教授和齐民友教授,他们在学术上对作者的启迪,使作者得以进入微局部分析的研究领域,进而写作本书.此外,在本书写作过程中得到国家自然科

学基金和国家教委博士点基金的资助，在此一并表示诚挚的感谢.

陈恕行

1997年12月于复旦大学

# 目　录

## 引言

# CONTENTS

# 第 1 章

# 奇性分析问题研究的引入

## §1.1 经典的奇性传播定理

在本节中讨论经典的奇性传播定理,先考察几个简单的例子.在$(x, y)$空间中考察如下的一阶线性偏微分方程

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x, y), \qquad (1.1.1)$$

这里$a, b, c$均为$x, y$的$C^\infty$函数,且$a^2+b^2\neq 0$. 方程(1.1.1)一般可以通过特征线法来求解.在此定义方程(1.1.1)的特征曲线为常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a(x, y),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=b(x, y) \qquad (1.1.2)$$

的解.

今设在空间$(x, y, u)$中有一曲线

$$l: x=\xi(t),\ y=\eta(t),\ u=\zeta(t),$$

其中$\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$均有一阶连续导数,且$\xi_t^2+\eta_t^2\neq 0$. 要寻求方程组(1.1.1)过$l$的积分曲面,即寻求函数$u(x, y)$使它满足方程(1.1.1),而且$\zeta(t)=u(\xi(t), \eta(t))$,这样的问题称为Cauchy问题.为解此Cauchy问题,先解常微分方程组(1.1.2)满足初始条件

$$x(0)=\xi(t),\ y(0)=\eta(t) \qquad (1.1.3)$$

的初值问题.这个初值问题的解是以$s$为参数的单参数曲线族

$$x=x(s,t),\ y=y(s,t),\tag{1.1.4}$$

它覆盖了 $x=\xi(t)$, $y=\eta(t)$ 的某个邻域 $\Omega$,若对 $\Omega$ 中任一点,$\partial(x,y)/\partial(s,t)\neq 0$,则在该点的邻域中存在一个从$(s,t)$到$(x,y)$的微分同胚.再对 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c(x(s,t),y(s,t))$, $u|_{s=0}=\zeta(t)$ 也进行积分,得到 $u=u(s,t)$ 的函数,再用(1.1.3)的逆变换代入,即可得 Cauchy 问题(1.1.1)、(1.1.2)的解 $u(x,y)$.显然,由于 $a$, $b$ 仅依赖于 $x$、$y$,所以上述两次求解常微分方程的过程等价于求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=b,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c,\tag{1.1.5}$$

$$x|_{s=0}=\xi(t),\ y|_{s=0}=\eta(t),\ u|_{s=0}=\zeta(t).\tag{1.1.6}$$

关于函数 $u(x,y)$满足方程(1.1.1)的证明是经典的,读者可参见文献[38].以下着重对解的奇性进行分析.

奇性是相对于正则性而言的,在 $C^\infty$ 正则性的意义下,在解的定义区域中使解为非 $C^\infty$的点都称为奇点,故虽然函数 $u(x,y)$为连续可微函数,它仍有奇性可言.若方程(1.1.1)的解 $u(x,y)$在$(x_1,y_1)$点为 $C^\infty$,则可以过$(x_1,y_1)$ 作一条 $C^\infty$曲线 $l$ : $x=\xi_1(t)$, $y=\eta_1(t)$,使它的切线方向处处与向量场$(a,b)$横截.记 $\zeta_1(t)=u(\xi_1(t),\eta_1(t))$,则方程(1.1.1)以$(\xi_1(t),\eta_1(t),\zeta_1(t))$为初值的积分曲面就是 $u=u(x,y)$.显然,此时按前述的步骤所得到的函数 $x(s,t)$ 和 $y(s,t)$ 都是 $C^\infty$的,而且由

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=a\eta_1'(t)-b\xi_1'(t)\neq 0$$

可知,$u(x,y)$沿过$(x_1,y_1,u(x_1,y_1))$的特征线为 $C^\infty$的.反之,若 $u(x,y)$在某点$(x_2,y_2)$非 $C^\infty$,则 $u$ 在过该点的特征线 $l'$ 上必定也是非 $C^\infty$的.事实上,若 $u$ 在 $l'$的某点$(x_s,y_s)$为 $C^\infty$,则由前面的证明可知 $u(x,y)$在过$(x_s,y_s)$的特征线上为 $C^\infty$,由常微分方程组解的唯一性定理知该特征线就是 $l'$.从而 $u$ 在$(x_2,y_2)$为 $C^\infty$ 正则.但

这与原先的假设矛盾. 简言之，方程(1.1.1)的可微解的奇性是沿着特征线传播的.

上述结论可按多种意义推广. 例如，讨论方程(1.1.1)连续而分片光滑解，可以得到的结论是：若方程(1.1.1)的分片光滑解的导数在某曲线上有间断，则该曲线必定是特征线.

再以一维波动方程的 Cauchy 问题为例，考察方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1.7}$$

满足初始条件

$$u(0, x) = 0, \ u_t(0, x) = \phi(x) \tag{1.1.8}$$

的解，其中 $\phi(x)$取为

$$\phi(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

那么，函数 $\phi(x)$在 $x = \pm 1$ 处一阶导数连续，二阶导数有间断. Cauchy 问题(1.1.7)、(1.1.8)的解为

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[(x-at)^2-1]^2, \ 若 |x-at| \leq 1, \ |x+at| > 1; \\ \frac{1}{2}[(x+at)^2-1]^2, \ 若 |x-at| > 1, \ |x+at| \leq 1; \\ \frac{1}{2}[(x-at)^2-1]^2 + \frac{1}{2}[(x+at)^2-1]^2, \\ \qquad\qquad 若 |x-at| \leq 1, \ |x+at| \leq 1; \\ 0, \ 其他. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

显然，解 $u(t, x)$的奇性发生在过$(0, \pm 1)$的特征线上，即解的奇性是沿着特征线而传播的.

对于一般的偏微分方程，上述结论是否仍然成立呢？为此，考察 $m$ 阶线性偏微分方程，它的一般形式为

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\alpha,\ |\alpha|\le m} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$
$$= f(x_1,\cdots,x_n), \tag{1.1.11}$$

讨论方程(1.1.11)的弱间断解,它的定义是:

**定义 1.1.1** 若在变量$(x_1,\cdots,x_n)$变化的区域$\Omega$内有一个$C^m$曲面$S$,函数$u(x_1,\cdots,x_n)$在$\Omega\backslash S$上为$C^m$,且满足方程(1.1.11),又$u\in C^{m-1}(\Omega)$,$u$的$m$阶导数在$S$上有第一类间断,则称$u$为方程(1.1.11)的弱间断解.此时,曲面$S$称为弱间断面.

对于方程(1.1.11),曲面$\phi(x_1,\cdots,x_n)=0$称为它的特征曲面,若在$\phi=0$上的每一点满足

$$\sum_{|\alpha_1+\cdots+\alpha_n|=m} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}=0. \tag{1.1.12}$$

**定理 1.1.1** 若$u(x_1,\cdots,x_n)$为方程(1.1.11)的弱间断解,则它的弱间断面必定为特征曲面.

**证明** 设$P$为弱间断面$S$上任一点.记曲面$S$在$P$点邻域中的方程为$\psi(x_1,\cdots,x_n)=0$,它满足$\sum\psi_{x_i}^2\neq 0$.不妨设$\psi_{x_1}\neq 0$,则可以在$P$点的邻域引进如下的变换:

$$y_1=\psi(x_1,\cdots,x_n),\ y_2=x_2,\ \cdots,\ y_n=x_n, \tag{1.1.13}$$

显然$\partial(y_1,\cdots,y_n)/\partial(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$,故(1.1.13)是一个局部的同胚变换.在此变换下,函数$u(x)$变为$U(y)=u(x(y))$,曲面$S$变为$y_1=0$,方程(1.1.11)变为

$$\sum_{|\alpha_1+\cdots+\alpha_n|=m} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x(y))\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\frac{\partial^m U}{\partial y_1^m}$$
$$+\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=\beta,\ |\beta|\le m,\ \beta_1<m} b_{\beta_1,\cdots,\beta_n}(y)\frac{\partial^\beta U}{\partial y_1^{\beta_1}\cdots\partial y_n^{\beta_n}}$$
$$=f(x(y)). \tag{1.1.14}$$

根据弱间断解的定义可知,(1.1.14)式中各项除等式左端的首项

外，都在 $P$ 点的邻域中连续，于是在 $S$ 的两侧考察等式(1.1.14)在 $P$ 点的极限，并将此两侧的极限值相减，可得到

$$\sum_{|\alpha_1+\cdots+\alpha_n|=m} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(x(y))\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\left[\frac{\partial^m U}{\partial y_1^m}\right]=0, \tag{1.1.15}$$

其中[·]表示方括号内的量在曲面 $S$ 上的跃度. 因为 $u(x)$ 的 $m$ 阶导数在 $S$ 上有间断，故 $\left[\frac{\partial^m U}{\partial y_1^m}\right]\neq 0$，所以，为使(1.1.15)能成立，其系数必须为零. 而这正意味着 $\psi=0$ 满足特征方程的要求. 这样就证得了 $S$ 必为特征曲面. □

**注** 定理 1.1.1 说明，偏微分方程(1.1.11)的弱间断解的 $m$ 阶导数的间断总是分布在特征曲面上，这一事实对于更弱的奇性也是对的. 也就是说，若 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 为方程(1.1.11) 的 $C^k$ 解，$k\geq m$，但 $u$ 的 $k+1$ 阶导数在 $C^k$ 类曲面 $S$ 上有第一类间断，那么 $S$ 必为(1.1.11)的特征曲面.

定理 1.1.1 中所述的结论对非线性方程也是成立的. 但这时需注意的是特征曲面与解有关. 高阶非线性偏微分方程的一般形式为

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \cdots, \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \cdots\right)=0, \tag{1.1.16}$$

其中，$F$ 为其变元$(x_1, \cdots, x_n, u, \cdots, p_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}, \cdots)$的 $C^\infty$ 函数. 对于给定的解 $u(x)$，曲面 $\phi(x_1, \cdots, x_n)=0$ 称为方程(1.1.16)的特征曲面，如果

$$\sum_{|\alpha_1+\cdots+\alpha_n|=m}\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}\left(x, u, \cdots, \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \cdots\right)$$
$$\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}=0 \tag{1.1.17}$$

在曲面 $\phi(x_1, \cdots, x_n)=0$ 的每一点成立，则有以下定理：

**定理 1.1.2** 若 $u(x_1, \cdots, x_n)$为方程(1.1.16)的 $C^k$ 解 $(k\geq$

$m+1$)，但它的 $k+1$ 阶导数在曲面 $S$ 上有第一类间断，则 $S$ 必为方程(1.1.16)的特征曲面.

此定理的证明与定理 1.1.1 相似，读者可自行证明之，在此作一些说明.

**注 1** 曲面 $S$ 是与解 $u$ 有关的. 所以只有在得到方程的解以后，才能讨论奇性的分布. 而在线性方程与半线性方程的情形，可能出现奇性的特征曲面，可以在求得解以前给出.

**注 2** 在一般非线性方程的情形，由于载有解的奇性的曲面与解有关，而在求解方程(1.1.17)时又要用到系数的导数，故通常需要求方程(1.1.16)的解 $u$ 至少是 $C^{m+1}$ 函数. 但在拟线性方程的情形，这个要求可以放宽为 $k \geq m$.

定理 1.1.1 与定理 1.1.2 说明了弱奇性解的奇性必定出现在特征曲面上. 但是，在该特征曲面上并不一定处处都是解的奇性. 这时，能否对解的奇性作更细致的刻画呢？下面就线性方程(1.1.11)的情形进行讨论，对于非线性方程的讨论是类似的.

**定义 1.1.2** 将(1.1.12)视为关于函数 $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ 的一阶偏微分方程，它的特征线称为方程(1.1.11)的*次特征线*.

将(1.1.12)简记为 $H\left(x_1, \cdots, x_n, \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial \phi}{\partial x_n}\right)=0$，它是函数 $\phi$ 的非线性方程，且是一个不明显地含有 $\phi$ 的一阶偏微分方程. 若函数 $\phi$ 已知，则称常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.1.18}$$

满足初始条件 $x_i(0)=x_{i0}$ 的解为方程(1.1.12)的特征线. 在曲面 $\phi=0$ 上，记 $p_i=\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} H_{p_j}.$$

但由特征方程(1.1.12)本身求导可得

$$H_{x_i} + H_{p_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

故 $p_i(s)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x, \phi_x). \tag{1.1.19}$$

现将 $p_1, \cdots, p_n$ 也视为未知函数，则 $(x_1(s), \cdots, x_n(s), p_1(s), \cdots, p_n(s))$ 满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{1.1.20}$$

式中 $H$ 的变元为 $x_1, \cdots, x_n$ 与 $p_1, \cdots, p_n$. 方程组(1.1.20)的解也称为偏微分方程(1.1.11)的次特征带，而(1.1.11)的次特征线正是次特征带在$(x_1, \cdots, x_n)$空间的投影.

**定理 1.1.3** 方程(1.1.11)的弱间断解在特征曲面 $\phi = 0$ 上的奇性是沿着次特征线传播的.

**证明** 与定理 1.1.1 的证明相仿，作变换(1.1.13)$x \mapsto y$，得到

$$H\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_n}\right)u(x(y))$$
$$+ Ku(x(y)) = f(x(y)), \tag{1.1.21}$$

其中 $K$ 为低于 $m$ 阶的偏微分算子. 将(1.1.21)中的 $H$ 作多项式展开，并注意到函数 $\phi$ 所满足的方程(1.1.12)，即有

$$\sum_{i=2}^{n} H_{p_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial y_1^{m-1}}\right)$$
$$+ b\frac{\partial^{m-1} u}{\partial y_1^{m-1}} + \cdots = f, \tag{1.1.22}$$

其中被省略的项中关于 $y_1$ 的求导次数不超过 $m-2$. 由于 $u$ 在曲

面 $S$ 上有弱间断，它在 $S$ 的两侧 $\dfrac{\partial^m u}{\partial y_1^m}$ 存在，但它们在 $S$ 上的极限值不同. 在(1.1.22)两端关于 $y_1$ 求导，可得

$$\sum_{i=2}^{n} H_{p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right) + b_1 \frac{\partial^m u}{\partial y_1^m} + \cdots = f, \quad (1.1.23)$$

其中被省略的项中关于 $y_1$ 的求导次数不超过 $m-1$. 于是，记

$$w = \left(\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right)_+ - \left(\frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}\right)_-$$

为 $\dfrac{\partial^m u}{\partial y_1^m}$ 在 $S$ 上的跃度，则 $w$ 应满足

$$\sum_{i=2}^{n} H_{p_i} \frac{\partial}{\partial y_i} w + b_1 w = 0, \quad (1.1.24)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + b_1 w = 0.$$

所以沿着次特征线有下式成立：

$$w = w_0 \cdot \exp\left(-\int_{s_0}^{s} b_1 \mathrm{d}s\right), \quad (1.1.25)$$

这里 $w_0$ 表示 $w$ 在 $s = s_0$ 的值. 此式表示在弱间断面上间断是沿着次特征传播的，即如果在一条次特征线的某一点 $\partial^m u$ 的跃度不等于零，则它在次特征线的任何一点都不会消失. □

与定理 1.1.1 后面的说明相同，定理 1.1.3 的结论对于更弱的间断也是适用的.

**例** 下面以波动方程为例，对上述定理给出进一步的说明. 三维波动方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad (1.1.26)$$

它可以用于描述均匀介质中电磁波或光波的运动. 若 $\phi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ 是它的特征曲面，则函数 $\phi$ 应满足方程

$$\phi_t^2 - \phi_{x_1}^2 - \phi_{x_2}^2 - \phi_{x_3}^2 = 0. \qquad (1.1.27)$$

在曲面非退化的情形恒有 $\phi_t \neq 0$，故可以从 $\phi(t, x_1, x_2, x^3) = 0$ 解得到 $t = \psi(x_1, x_2, x_3)$，其中 $\psi$ 满足方程

$$\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2 = 1. \qquad (1.1.28)$$

若 $\phi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ 是承载着函数 $u$ 的奇性的曲面，则对于每个面定的 $t$，$\psi(x_1, x_2, x_3) = t$ 表示该曲面在时刻 $t$ 到达的位置. 它就是波的传播过程中的波阵面. 方程(1.1.28)的特征线可以作为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = 2p_i, \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = 0 \qquad (1.1.29)$$

的积分曲线在$(x_1, x_2, x_3)$空间中的投影而得到. 任取$(x_{10}, x_{20}, x_{30}, p_{10}, p_{20}, p_{30})$，其中$(p_{10}, p_{20}, p_{30})$满足 $\sum p_{i0}^2 = 1$，则(1.1.29)以

$$x_i(0) = x_{i0}, p_i(0) = p_{i0} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (1.1.30)$$

为初值的解是

$$x_i = p_{i0}s + x_{i0}, p_i = p_{i0}, \qquad (1.1.31)$$

它是$(x_1, x_2, x_3)$空间中以$(p_{10}, p_{20}, p_{30})$为方向的直线. 注意到 $\left(\sum (x_i - x_{i0})^2\right)^{\frac{1}{2}} = s$，且方向$(p_{10}, p_{20}, p_{30})$即曲面(1.1.28)的法向，则由定理 1.1.3 可知方程(1.1.26)的解的弱奇性沿波阵面的法线方向传播，且传播的速度相等. 故若用波动方程(1.1.26)描述光波的运动，那么方程 $\psi(x_1, x_2, x_3) = t$ 可描述光波波阵面的传播，而(1.1.31)说明，在均匀介质中光线是沿着直线传播的.

考察非均匀介质中光波的运动，若介质为各向同性的，则方程(1.1.26)应改为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) = 0, \qquad (1.1.32)$$

其中 $n=n(x_1, x_2, x_3)$ 为介质的光折射率.如以上推导可得到,若 $\psi(x_1, x_2, x_3)=t$ 为方程(1.1.32)的特征曲面族,则函数 $\psi$ 满足

$$\psi_{x_1}^2+\psi_{x_2}^2+\psi_{x_3}^2=n(x_1, x_2, x_3)^2, \tag{1.1.33}$$

它的特征线应当满足

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=2p_i, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s}=(n^2)_{x_i}. \tag{1.1.34}$$

当 $n(x_1, x_2, x_3)$不是常数时,$p_i$ 沿特征线一般不是常数,所以特征线也不再为直线.由奇性传播的一般结论可知,光在非均匀介质中不再沿直线传播.

## §1.2 向现代理论过渡

虽然在上节中所述的经典理论能说明许多关于奇性分布的信息,但是它还不够精确,且对有些问题不能给予确切的回答,例如,考察二维波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2};\\ u(0, x, y)=\phi(x, y), u_t(0, x, y)=0,\end{cases} \tag{1.2.1}$$

当 $\phi(x, y)$取为 $\delta(x, y)$时,它的解是

$$u_\delta(t, x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{1}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}, & x^2+y^2<t^2;\\ 0, & x^2+y^2\geq t^2.\end{cases} \tag{1.2.2}$$

而当 $\phi(x, y)$ 取为 Heaviside 函数 $\theta(x)$ 时,它的解为

$$u_\theta(t, x, y)=\begin{cases}1, & x>t;\\ \dfrac{1}{2}, & -t\leq x\leq t;\\ 0, & x<t.\end{cases} \tag{1.2.3}$$

由解的表达式可知，$u_\delta(t, x, y)$的奇性从原点出发，沿着特征锥 $x^2+y^2=t^2$ 往各个方向传播，而 $u_\theta(t, x, y)$的奇性分布在两个平面 $x=\pm t$ 上.

按照定理 1.1.3 的结论，奇性沿次特征线传播. 类似于上节的例中的推导可知，方程(1.2.1)过$(0, x_0, y_0)$的次特征线为

$$x = ps + x_0,\ y = qs + y_0, \tag{1.2.4}$$

其中 $p$、$q$ 为常数，满足 $p^2+q^2=1$. 当$(p, q)$在满足此限制条件下任意变动时，所有这些次特征线布满了过$(0, x_0, y_0)$点的特征锥面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=t^2$. 解 $u_\delta(t, x, y)$的奇性正与此一致. 但是，在 $\phi(x, y)=\theta(x)$ 的情形，$y$ 轴上的每一点都是初始条件的间断点，过 $y$ 轴上各点的特征锥面的集合是整个楔状区域 $x^2 \leq t^2$. 也就是说，过 $t=0$ 平面上间断点的所有次特征线的集合充满整个楔状区域. 于是，按定理 1.1.3，该区域中每一点都可能是解的奇点，但实际上解的奇性仅仅发生在该楔状区域的表面. 我们自然希望了解其中的缘由，并得到奇性分布的更精确的信息.

在物理学中有这样一个原理，称为 Huygens 构图原理(或称 Huygens 构图法). 这个原理说：在波的传播过程中，在时刻 $t=t_1$ 的波阵面是以 $t=0$ 时的波阵面上的点为源发出的波动在时刻 $t_1$ 的所有波阵面的包络. 如果考虑在均匀介质中波的传播，在时刻 $t_1$ 时的波阵面就是以 $t=0$ 时的波阵面上的各点为心，以 $t$ 为半径的诸球面的包络. 如果这个波动过程可以用一个偏微分方程(一般来说是双曲型方程)来描述，则波阵面一般表现为承载这个方程解的奇性的曲面. 但是，对照定理 1.1.3，解的奇性有可能出现在所有这些球面的内部. 也就是说，解的奇性有可能充满以 $t=0$ 时的波阵面为中心面，厚度为 $t$ 的整整一层. 那么，为什么实际上在时刻 $t$ 解的奇性只出现在包络面上呢？此外，在上述构图法中，我们将得到两个“平行”的曲面，而实际上其中只有一个是解在时刻 $t_1$ 的波阵面，而另一个则是对应于时刻 $-t_1$ 的，这又如何解释呢？

数学家们对这些问题进行了长期的探讨. 在从波动方程研究

开始的一百余年中,人们结合对波的传播、反射、绕射等物理过程的研究与相应的偏微分方程求解的研究中获得了许多进展,其中特别是 J. Hadamard、I. G. Petrovsky、L. Gårding 等学者的研究工作. 他们的一系列研究工作大大增加了人们对描述波动过程的偏微分方程性质的了解,包括解的构造与它的奇性分布(对此读者可以参阅文献[70]的历史评述). 下面特别介绍 P. D. Lax[81]的工作中蕴含的思想,因为这一思想在奇性分析的经典理论过渡到近代理论中起了重要的作用.

在$(t, x)$空间中给定一个偏微分方程的初值问题:

$$Pu \equiv \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(t, x)(\partial_t^{\alpha_0}\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n})u = 0, \tag{1.2.5}$$

$$u(0, x) = \phi(x). \tag{1.2.6}$$

在研究问题(1.2.5)和(1.2.6)的解的奇性传播时,P. D. Lax 考虑到奇性传播实质上就是波的传播过程的描述,他暂时不讨论单个波阵面的传播,而讨论高频波的传播. 设初值 $\phi(x)$具有高频振动的形式 $e^{i\xi l(x)}\psi(x)$, 或更一般地, $\phi(x)$具有带大参数 $\xi$ 的形式:

$$\phi(x) \sim e^{i\xi l(x)}\left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{\xi} + \cdots\right), \tag{1.2.7}$$

则可考虑形式为 $u(t, x) = e^{i\xi l(t, x)}v(t, x, \xi)$ 的解,其中 $v(t, x, \xi)$也具有关于 $\xi$ 负幂指数的渐近展开式,也就是说

$$u \sim e^{i\xi l(t, x)}\left(v_0 + \frac{v_1}{\xi} + \cdots\right). \tag{1.2.8}$$

偏微分算子 $P$ 可以记为

$$P = P_m + P_{m-1} + \cdots,$$

其中 $P_j$ 为 $j$ 阶微分算子,其象征为 $p(x, \xi)$. 将形式为(1.2.7)的 $u$ 代入方程 $Pu = 0$ 后,所得各项按 $\xi$ 的幂次排列,可得

$$p_m(t, x, l_t, l_x)v_0\xi^m + \left(\sum_{j=0}^{n} p_m^{(j)}(t, x, l_t, l_x)\partial_{x_j}v_0\right.$$

$$+ p_{m-1}(t, x, l_t, l_x)v_0 + p_m(t, x, l_t, l_x)v_1\Big)\xi^{m-1} + \cdots, \tag{1.2.9}$$

其中 $p_m^{(j)}$ 表示多项式 $p_m(t, x, \zeta_0, \cdots, \zeta_n)$对 $\zeta_j$ 的导数. 令各同次幂项之和等于零,可知 $l(t, x)$ 应当满足

$$p_m(t, x, l_t, l_x) = 0, \tag{1.2.10}$$

它称为*光程方程*. 相应地, $v_k(t, x, \xi)$应当满足

$$\sum_{j=0}^{n} p_m^{(j)}(t, x, l_t, l_x)\partial_{x_j} v_0 + p_{m-1}(t, x, l_t, l_x)v_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Big(\sum_{j=0}^{n} p_m^{(j)}(t, x, l_t, l_x)\partial_{x_j} + p_{m-1}(t, x, l_t, l_x)\Big)v_k$$
$$+ F_k(v_0, \cdots, v_{k-1}) = 0. \tag{1.2.11}$$

它们称为*输运方程*,其中 $F_k$ 是其变元的 $C^\infty$ 函数,在决定 $v_k$ 的方程中所出现的 $v_0, \cdots, v_{k-1}$ 都是由前面的方程已决定了的. $l(t, x)$ 与 $v_k(t, x)$的初始条件可以由(1.2.7)定出,它们是

$$l(0, x) = l(x), \quad v_k(0, x) = \phi_k(x) \quad (k = 1, \cdots, n, \cdots). \tag{1.2.12}$$

通过求解(1.2.10)和(1.2.11)的 Cauchy 问题,就可以相继得到 $v_k(t, x)$的值. 如果暂不考虑渐近级数中“渐近性”的特定意义,就已经得到了问题(1.2.5)和(1.2.6)的具有高频振动的解.

现在对所得到的解作进一步的讨论,当得到了方程(1.2.10)的解 $l(t, x)$以后,对每个常数 $c$, $l(t, x) = c$ 就是方程(1.2.5)的特征曲面,它在初始平面上的截值为 $l(x) = c$. 注意到在方程(1.2.11) 中, 第 $k+1$ 个方程是 $v_k$ 的一阶偏微分方程, 其中 $v_0, \cdots, v_{k-1}$ 被视为已知的,而作用于 $v_k$ 的一阶微分算子是一致的,它的方向为

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial \zeta_0}, \cdots, \frac{\partial p_m}{\partial \zeta_n}\right). \qquad (1.2.13)$$

易见，这个方向与算子 $P$ 的次特征线的方向一致，所以(1.2.11)实际上是沿着算子 $P$ 的次特征线求微分的微分方程，从而可以通过沿特征线积分的方法将它们逐个地解出. 而且，若初始条件 $\psi(x)$ 的支集在点 $Q$ 的某个邻域中，则所有 $v_k(t, x)$ 的支集也落在过 $Q$ 点的次特征线 $\gamma$ 的某个邻域中. 这一事实说明了上面所考虑的高频振动沿次特征线 $\gamma$ 传播. 它与前节中所得到的关于奇性沿次特征线传播的结论是一致的.

这里需强调指出的是：方程(1.2.5)的解在 $Q$ 点的扰动并非沿过 $Q$ 点的一切次特征线传播，扰动传播的次特征线 $\gamma$ 与 $(l_t, l_{x_1}, \cdots, l_{x_n})$ 在 $t=0$ 时的取值有关，这里 $(l_{x_1}, \cdots, l_{x_n})$ 在 $t=0$ 时的值即 $(\psi_{x_1}, \cdots, \psi_{x_n})$，而 $l_t|_{t=0}$ 由等式(1.2.10)决定. 注意到(1.2.10)是 $(l_t, l_{x_1}, \cdots, l_{x_n})$ 的 $n$ 次齐次代数方程，它有 $n$ 个根. 特别是，在方程(1.2.5)关于 $t=0$ 是双曲型的情形，这 $n$ 个根都是实根. 于是相应地可以得到过 $Q$ 点的 $n$ 条次特征线. 初始条件中的高频振动将只沿着这 $n$ 条特征线往 $t>0$ 区域中传播.

上面的讨论说明两个事实：一是偏微分方程解的高频振动的传播与奇性传播一样，是沿着次特征线传播的；二是高频振动的传播路径不仅与该振动所处的位置有关，而且与它的振动方向有关，这就给了我们这样的启发：函数的奇性应该利用点的位置与方向两个要素联合起来刻画，奇性传播的途径与这两个要素有关，这正是近代偏微分方程的奇性分析理论中的一个重要的思想. 事实上，利用这两个要素所刻画的奇性中将包含有更多的信息，本节之初所提出的问题也可以得到确切的回答. 在第2章中将进行详细地说明，如何用点的位置与方向这两个要素来刻画函数的奇性，以及这两个要素如何决定了偏微分方程解的奇性的传播.

# 第 2 章

# 线性方程的奇性分析

## §2.1 波 前 集

如上一章末所指出的，若用位置与方向两个要素来刻画偏微分方程解的奇性，有可能获得对奇性及其分布规律的更精确的描述. 现在先用这一观点来考察一般的函数，建立一些关于函数奇性的一般性的结论. 在本书中所讨论的一般的函数是指 Schwartz 分布意义下的广义函数. 在偏微分方程理论的研究中，有时人们也用到其他意义下的广义函数，例如 Sato 的超函数，Columbo 意义下的广义函数等，但由于它们尚不及 Schwartz 分布那样被人们所普遍接受与广泛应用，故在本书中暂不涉及.

函数的奇性或正则性是一种局部性质，为考察函数在某一区域中的正则性，可以分别考察它在各点的邻域中的正则性. 如果一个函数 $u$ 在某点是无穷次可微的，我们就称它为 *$C^\infty$ 光滑的*，否则，称它按 $C^\infty$ 的意义*有奇性*，或简称*有奇性*，并称该点为 $u$ 的*奇点*. 函数 $u$ 的所有奇点的集合的闭包称为*奇支集*，记为 singsupp $u$. 但是，同样在一点有奇性的函数，其性质可以相差很远. 如在 §1.2 的例子中，函数 $\delta(x, y)$ 与 $\theta(x)$ 都在原点有奇性. 但是在二维波动方程以它们为初始条件的解中，$u_\delta(t, x, y)$ 的奇性沿过原点的一切次特征线往 $t > 0$ 区域传播，而 $u_\theta(t, x, y)$ 的奇性仅沿过原点而在 $x = \pm t$ 上的次特征线上传播.

怎样把 $\delta(x, y)$与 $\theta(x)$在原点的奇性的不同特点表达清楚呢？一个很好的工具就是 Fourier 变换，Fourier 变换将函数的正则性与变换后的象在无穷远处的衰减速度联系在一起. 例如，在

Fourier 变换的理论中有 Paley-Winner 定理. 它断定:在$(x_1, \cdots, x_n)$空间中 $C_0^\infty$ 函数 $u(x)$的 Fourier 变换 $\hat{u}(\xi)$ 在$|\xi|\to\infty$时是速降的. 即对任意 $N$,有常数 $C_N$,使得 $|\hat{u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}$ 成立,或记为

$$|\hat{u}(\xi)| = O(|\xi|^{-N}),\ \text{当}\ |\xi| \to \infty, \tag{2.1.1}$$

并且这个命题的逆命题也是对的. 于是,如果 $u(x)$在某点为 $C^\infty$,就可以找一个支集在该点充分小的邻域中的 $C_0^\infty$ 函数 $\phi(x)$,使 $\phi(x)u(x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{\phi u}(\xi)$ 满足(2.1.1)式. 反之,若 $u$ 在一点不是 $C^\infty$光滑的,则对任意在该点非零的 $C_0^\infty$ 函数 $\phi(x)$, $\widehat{\phi u}(\xi)$ 不可能有(2.1.1)中所示的估计.

一个重要的事实是:(2.1.1)式提供了对函数的奇性作更细致考察的可能性,在(2.1.1)不成立的情形下,$\hat{u}(\xi)$仍有可能沿着某些方向速降. 例如,考察 $R_{xy}^2$中 Heaviside 函数 $\theta(x)$的 Fourier 变换. 取 $\phi(x, y)$为乘积 $\psi_1(x)\cdot\psi_2(y)$的形式,其中 $\psi_1(x)$、$\psi_2(y)$都是 $C_0^\infty$ 函数,则 $\theta(x)\psi_1(x)\psi_2(y)$ 的 Fourier 变换是

$$\begin{aligned} F[\theta\psi_1\psi_2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i(x\xi+y\eta)}(\theta(x)\psi_1(x)\psi_2(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \hat{\psi}_2(\eta)\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi}\psi_1(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

现考察$(\xi, \eta)\to\infty$时该 Fourier 变换的性质,在(2.1.2)式的右端,当$|\eta|\to\infty$时 $\hat{\psi}_2(\eta)$为速降的,而后一个因子$\left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ix\xi}\psi_1(x)\mathrm{d}x\right|$可以用$\int_0^\infty |\psi_1(x)|\mathrm{d}x$ 来控制,从而它是一个有界量. 所以,若记$(\xi, \eta) = (\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}(\tau_1, \tau_2)$,只要$\tau_2\neq 0$,就有$(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}\leq C|\eta|$,故此时仍有

$$F[\theta\psi_1\psi_2] = O(|\eta|^{-N}) = O((\xi^2+\eta^2)^{-\frac{N}{2}}). \tag{2.1.3}$$

由此可知,仅在 $\tau_2 = 0$ 时,$\theta\psi_1\psi_2$ 的 Fourier 变换才不是速降的. 如

果将 Fourier 变换速降的方向称为“好”方向，反之，称为“坏”方向. 则可以说，只要 $\tau_2 \neq 0$，$(\tau_1, \tau_2)$ 就是“好”方向，只有方向 $(\tau_1, 0)$ 可能是“坏”方向(读者试自行证明，方向(1, 0)必是“坏”的).

对于函数 $\delta(x)$，情形就完全不同了，只要 $\phi(0)\neq 0$，就有

$$F[\phi\delta](\xi) = \langle \phi\delta, e^{-ix\xi} \rangle = \phi(0) \neq 0.$$

因此，不管 $\xi$ 沿什么方向趋于无穷，$\widehat{\phi\delta}(\xi)$ 都不会速降. 也就是说，这时任何方向都是“坏”的.

因此，为了精确地描述函数 $u$ 在奇点的性质，我们引入“波前集”的概念，记为 $WF(u)$(或 $WFu$). 它是奇点概念的深化. 在给出波前集的定义之前，在此先说明一下锥邻域的概念，对于 $R^n_\xi$ 空间中的集合 $V$，若 $\xi \in V$，$t > 0$，必能推出 $t\xi \in V$，这样的集合 $V$ 称为锥. 又若 $V$ 为 $R^n_\xi$ 中的开锥，$\xi_0 \in V$，则称 $V$ 为 $\xi_0$ 的锥邻域.

**定义 2.1.1** 对于给定的 $u \in D'(\Omega)$，它的波前集 $WF(u)$ 定义为 $\Omega \times R^n_\xi\backslash 0$ 中这样的子集：若 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$，则有 $x_0$ 的邻域 $\omega$、$\xi$ 的锥邻域 $V$，使得对任一函数 $\phi(x) \in C_0^\infty(\omega)$ 与任意的正整数 $N$，都存在常数 $C_N$，使不等式

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}, \forall \xi \in V \quad (2.1.4)$$

成立.

分布的波前集与奇支集有以下的关系：

**定理 2.1.1** 若对任意的 $\xi \in R^n\backslash 0$，$(x_0,\xi) \notin WF(u)$，则 $x_0 \notin$ singsupp $u$.

**证明** 按波前集的定义，对每个 $\xi$ 可以找到 $x_0$ 的邻域 $\omega_\xi$ 与 $\xi$ 的锥邻域 $V_\xi$ 使得对一切 $C_c^\infty(\omega_\xi)$ 函数 $\phi_\xi(x)$ 有(2.1.4)成立. 由于 $R^n_\xi$ 空间中的单位球面是紧集，故可以从所有的 $V_\xi$ 中找出有限个 $V_j$，使 $\bigcup_j V_j = R^n_\xi\backslash 0$. 于是作 $\omega = \bigcap_j \omega_j$，并取在 $x_0$ 点不为零的函数 $\phi \in C_c^\infty(\omega)$，则在 $|\xi|\to\infty$ 时，$\widehat{\phi u}(\xi)$ 在每个 $V_j$ 上都速降，从而对一切正整数 $N$，有 $C_N$ 使

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \forall \xi \in R^n$$

成立. 由 Paley-Winner 定理知 $\phi u \in C_0^\infty(\omega)$, 但 $\phi(x_0) \neq 0$, 故 $u$ 在 $x_0$ 点为 $C^\infty$ 的. □

**定理 2.1.2** 以 $\Pi_x$ 记 $(x,\xi) \mapsto x$ 的投影映射, 则有

$$\Pi_x WF(u) = \text{singsupp } u. \tag{2.1.5}$$

**证明** 若 $x_0 \notin \text{singsupp } u$, 则在 $x_0$ 的邻域 $\omega$ 中 $u$ 为 $C^\infty$. 故对 $\phi(x) \in C_c^\infty(\omega)$, $\hat{\phi} u$ 在一切方向速降, 从而对一切 $\xi$, $(x_0, \xi) \notin WF(u)$, 这说明 $x_0 \notin \Pi_x WF(u)$.

反之, 若 $x_0 \notin \Pi_x WF(u)$, 则对一切 $\xi$, $(x_0, \xi) \notin WF(u)$. 从而由定理 2.1.1 知 $x_0 \notin \text{singsupp } u$. □

这两个定理清楚地说明, 波前集是在奇支集处对分布的性质更细致的刻画.

一些简单函数的波前集可以根据定义由直接计算得到. 例如, 由本节开始的计算可知, 在 $R^2_{xy}$ 中

$$WF(\delta) = \{(0, 0, \xi, \eta); \forall (\xi, \eta) \in R^2\},$$

$$WF(\theta(x)) = \{(0, y, \xi, 0)\}.$$

对于一些较复杂的函数, 需利用一些运算法则来得到其波前集. 例如, 若 $u$、$v$ 为定义于同一开集上的分布, 则 $WF(u+v) \subset WF(u) \cup WF(v)$. 但对于乘积的分布, 情形就不那么简单了. 这时有如下定理:

**定理 2.1.3** 若 $u$ 为定义于 $\Omega$ 上的分布, $a \in C^\infty(\Omega)$, 则

$$WF(au) \subset WF(u). \tag{2.1.6}$$

**证明** 设 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, 则按定义 2.1.1 有 $x_0$ 的邻域 $\omega$ 及 $\xi_0$ 的锥邻域 $V$, 使对任意的函数 $\phi(x) \in C_0^\infty(\omega)$, 有(2.1.4) 成立. 现考察 $\phi au$ 的 Fourier 变换. 以下不妨设 $a$ 是有紧支集的, 不然的话, 可以找一个在 $\omega$ 上恒等于 1 的 $C_0^\infty$ 函数 $\zeta$, 而以 $\zeta a$ 来代替 $a$.

由乘积的 Fourier 变换公式知

$$\widehat{\phi au}(\xi)=\int \hat{a}(\xi-\eta)(\widehat{\phi u})(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{2.1.7}$$

取 $V_1$ 为 $\xi_0$ 的另一锥邻域,并使 $V_1 \Subset V$($V_1$ 在 $R^n\backslash 0$ 中的闭包含于 $V$ 中). 对于 $\xi\in V_1$ 将(2.1.7)写成

$$\widehat{\phi au}(\xi)=\int_V \hat{a}(\xi-\eta)(\widehat{\phi u})(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$+\int_{R^n\backslash V}\hat{a}(\xi-\eta)(\widehat{\phi u})(\eta)\mathrm{d}\eta.$$

对右端的第一项,由于 $\hat{a}$ 速降,$\widehat{\phi a}$ 在 $V$ 中速降,所以对任意的 $N_1$,取 $N=N_1+n+1$,有

$$(1+|\xi|)^{N_1}\left|\int_V \hat{a}(\xi-\eta)\ \widehat{\phi u}\ (\eta)\mathrm{d}\eta\right|$$

$$\leq\int_V(1+|\xi-\eta|)^{N_1}(1+|\eta|)^{N_1}|\hat{a}(\xi-\eta)|\cdot|\ \widehat{\phi u}\ (\eta)|\mathrm{d}\eta$$

$$\leq C\int_V(1+|\eta|)^{-n-1}\mathrm{d}\eta\leq C'.$$

而对于第二项,由于 $V_1$ 的闭包含于 $V$ 中,且 $\xi\in V_1$, $\eta\notin V$,故存在常数 $C$,使 $|\xi-\eta|\geq C(|\xi|+|\eta|)$. 从而对任意 $N_1$,取 $N=\max(N_1, n+1)$,有

$$(1+|\xi|)^{N_1}\left|\int_{R^n\backslash V}\hat{a}(\xi-\eta)\ \widehat{\phi u}\ (\eta)\mathrm{d}\eta\right|$$

$$\leq(1+|\xi|)^{N_1}\int_{R^n\backslash V}(1+|\xi|+|\eta|)^{-N}(1+|\eta|)^{-N}\mathrm{d}\eta$$

$$\leq C\int_{R^n\backslash V}(1+|\eta|)^{-n-1}\mathrm{d}\eta\leq C',$$

所以,在 $\xi\in V_1$ 时,$(1+|\xi|)^{-N_1}|\widehat{\phi au}(\xi)|$ 对一切 $N_1$ 有界,从而 $(x_0, \xi_0)\notin WF(au)$. □

**注** 利用定理 2.1.3 的证明可以得到波前集的一个等价定义

如下：

**定义 2.1.2** 对于给定的 $u\in D'(\Omega)$，$WF(u)$定义为 $\Omega\times R^n_\xi\backslash 0$ 中这样的子集：若 $(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$，则有 $x_0$ 的邻域 $\omega$，$\xi$ 的锥邻域 $V$，以及满足 $\phi(x_0)\neq 0$ 的 $C_0^\infty(\omega)$ 函数 $\phi(x)$，使得对任意的正整数 $N$，都存在常数 $C_N$，使不等式

$$|\widehat{\phi u}(\xi)|\leq C_N(1+|\xi|)^{-N},\ \xi\in V$$

成立.

从形式上看，定义 2.1.1 要求不等式(2.1.4)对一切 $C_0^\infty(\omega)$函数 $\phi(x)$成立，定义 2.1.2 只要求它对某一个 $\phi(x)$成立. 然而，它们是等价的. 显然，若 $(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$ 按定义 2.1.1 成立，则它自然按定义 2.1.2 成立. 反之，若 $(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$ 按定义 2.1.2 成立，则取 $x_0$ 的邻域 $\omega_1$，使 $\phi(x)$在 $\omega_1$ 上恒不为零. 从而对任意 $\phi_1(x)\in C_0^\infty(\omega_1)$，令

$$\phi_2(x)=\frac{\phi_1(x)}{\phi(x)}\in C_0^\infty(\omega_1),$$

则 $\phi_1 u=\phi_2\cdot\phi u$. 于是，根据定理 2.1.3 的证明知，$\widehat{\phi u}$ 在某个开锥中的速降必能推出 $\widehat{\phi_1 u}$ 在此锥中的速降，所以 $(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$ 按定义 2.1.1 也成立.

**定理 2.1.4** 若 $(WF(u)+WF(v))\cap O_x=\varnothing$，则 $u$ 与 $v$ 的乘积有意义. 且

$$WF(uv)\subset(WF(u)+WF(v))\cup WF(u)\cup WF(v),\tag{2.1.8}$$

其中 $WF(u)+WF(v)$ 表示

$$\{(x,\xi);\ \xi=\xi_1+\xi_2,(x,\xi_1)\in WF(u),(x,\xi_2)\in WF(v)\},$$

$O_x$ 表示$\{(x,0)\}$.

**证明** 我们的基本想法是先作 $u$ 与 $v$ 的 Fourier 变换的卷积，并将此卷积的 Fourier 逆变换定义为 $u$ 与 $v$ 的乘积. 在这里，

定理的条件保证了上述卷积的存在性.

我们在点 $x \in \Omega$ 的邻域中进行讨论：对于固定的 $x$，作 $WF(u)$ 的锥邻域 $V_1$，$WF(v)$的锥邻域 $V_2$，则由

$$(WF(u)+WF(v))\cap O_x=\varnothing$$

知，$WF(u)+WF(v)$ 也是一个不含原点邻域的闭锥，故可作其锥邻域 $V_3$，并使 $V_3$ 为真锥. 再对 $i=1,2,3$ 作 $V_i'$ 为$\overline{V}_i$ 的锥邻域，考察由乘积 $uv$ 导出的 Fourier 变换在$V_1'\cup V_2'\cup V_3'$ 外的速降性. 在此设 $V_i$、$V_i'$ 均与相应的闭锥 $WF(u)$，$WF(v)$，$WF(u)+WF(v)$充分靠近，且有 $V_1+V_2\subset V_3'$ 成立.

取 $\phi$ 是在 $x$ 点不等于零的 $C_0^\infty$ 函数，它使 $\widehat{\phi u}$ 在 $V_1$ 外，$\widehat{\phi v}$ 在 $V_2$ 外分别为速降的. 对任意的 $\xi\notin \cup V_i'$ 与给定的正整数 $N$，有

$$\begin{aligned}&|(1+|\xi|)^N\cdot F(\phi^2uv)(\xi)|\\&=\left|\int(1+|\xi|)^N\ \widehat{\phi u}\ (\xi-\eta)\ \widehat{\phi v}\ (\eta)\mathrm{d}\eta\right|.\end{aligned}$$

今分别估计在区域

$$\left\{|\xi-\eta|\le\frac{|\xi|}{2},\ \eta\notin V_2\right\},\ \left\{|\xi-\eta|\le\frac{|\xi|}{2},\ \eta\in V_2\right\},$$

$$\left\{|\xi-\eta|>\frac{|\xi|}{2},\ \eta\notin V_2\right\},\ \left\{|\xi-\eta|>\frac{|\xi|}{2},\ \eta\in V_2\right\}$$

中上述积分的值. 由于 $\phi$ 具有紧支集，故存在 $N_0$，使得

$$|\ \widehat{\phi u}\ (\xi-\eta)|\le C(1+|\xi-\eta|)^{N_0},$$

$$|\ \widehat{\phi v}\ (\eta)|\le C(1+|\eta|)^{N_0}.$$

设 $M$ 为充分大的正数，则在 $\left\{|\xi-\eta|<\dfrac{|\xi|}{2},\eta\in V_2\right\}$中，

$$|\ \widehat{\phi v}\ (\eta)|\le C_M(1+|\eta|)^{-M}\le C_M(1+|\xi|)^{-M},$$

$$|\ \widehat{\phi u}\ (\xi-\eta)|\le C(1+|\xi|)^{N_0}(1+|\eta|)^{N_0}.$$

由 $M$ 可取得任意大，可知

$$I=\int_{|\xi-\eta|\leq\frac{|\xi|}{2},\ \eta\notin V_2}(1+|\xi|)^N\ \widehat{\phi u}\ (\xi-\eta)\ \widehat{\phi v}\ (\eta)\mathrm{d}\eta$$

速降.

考察在区域 $\left\{|\xi-\eta|\leq\frac{|\xi|}{2},\ \eta\in V_2\right\}$ 中的积分，此时必有 $\xi-\eta\notin V_1$，否则，由 $\xi=\xi-\eta+\eta\subset V_1+V_2\subset V_3'$ 将导致矛盾.于是由 $\xi$ 与 $\eta$ 分属两个分离的闭锥的事实，可知 $|\xi-\eta|>C(|\xi|+|\eta|)$，并根据 $\widehat{\phi u}$ 在 $V_1$ 外的速降性可得

$$\begin{aligned}|\ \widehat{\phi u}\ (\xi-\eta)|&\leq C_M(1+|\xi-\eta|)^{-M}\\&\leq C_M'(1+|\xi|)^{-M}(1+|\eta|)^{-M},\end{aligned}$$

故也由 $M$ 可取得任意大而知

$$\Pi=\int_{|\xi-\eta|\leq\frac{|\xi|}{2},\ \eta\in V_2}(1+|\xi|)^N\ \widehat{\phi u}\ (\xi-\eta)\ \widehat{\phi v}\ (\eta)\mathrm{d}\eta$$

速降.按类似的方法可证在区域

$$\left\{|\xi-\eta|>\frac{|\xi|}{2},\ \eta\notin V_2\right\}\left\{|\xi-\eta|>\frac{|\xi|}{2},\ \eta\in V_2\right\}$$

中的积分也关于 $\xi$ 一致有界.

综合以上讨论而知，当 $\xi\notin V_1'\cup V_2'\cup V_3'$ 时，对任意的 $N$，有

$$F(\phi^2uv)(\xi)=O((1+|\xi|)^{-N}).\tag{2.1.9}$$

但 $V_1'$、$V_2'$、$V_3'$ 可任意靠近 $WF(u)$、$WF(v)$、$WF(u)+WF(v)$，从而得(2.1.8)式.□

若对 $R_x^n$ 中的区域 $\Omega$ 施行一个同胚变换 $y=\psi(x)$，而将其变成 $R_y^n$ 中相应的区域 $G$，这时，对 $G$ 上的分布 $u$ 可以通过 $\psi$ 诱导出 $\Omega$ 上的分布 $\psi^*u$：$(\psi^*u)(x)=u(\psi(x))$. 这时，$\psi^*u$ 的奇点集即是 $u$ 的奇点集关于变换 $\psi$ 的逆象.那么 $\psi^*u$ 的波前集是否也可由 $WF(u)$ 决定呢？对此，有以下定理：

**定理 2.1.5**　若 $\psi$ 是上面所定义的 $C^\infty$ 同胚变换，则有

$$WF(\psi^* u) = \{(x, \xi);\ (\psi(x),\ ({}^t\psi')^{-1}\xi) \in WF(u)\}. \tag{2.1.10}$$

**证明**　考察下式在 $|\xi| \to \infty$ 时的速降性：

$$I = \int e^{-i\langle x, \xi\rangle}(\psi^* u)(x)\phi(x)dx$$
$$= \int e^{i\langle \psi^{-1}(y), \xi\rangle} u(y)\phi(\psi^{-1}(y))(\psi^{-1})'dy.$$

记 $\phi_1(y) = \phi(\psi^{-1}(y))(\psi^{-1}(y))'$，并作 $\phi_2(y) \in C_0^\infty(G)$，使它在 $\phi_1$ 的支集上为 1，则上式可写成

$$\int e^{-i\langle\psi^{-1}(y), \xi\rangle}\phi_1(y)\phi_2(y)u(y)dy.$$

利用 Fourier 变换的性质，知

$$I = \frac{1}{2\pi}\iint e^{-i(\langle\psi^{-1}(y), \xi\rangle - \langle y, \eta\rangle)}\phi_1(y)dy\ \widehat{\phi_2 u}\ (\eta)d\eta, \tag{2.1.11}$$

若 $(x, \xi)$ 满足 $(\psi(x),\ ({}^t\psi')^{-1}\xi) \notin WF(u)$，则由波前集的定义，可作 $\psi(x)$ 的邻域 $\omega$ 及 $({}^t\psi')^{-1}\xi$ 的邻域 $V$，使当 $y \in \omega$ 时，有 $({}^t\psi')^{-1}\xi \in V' \Subset V$，而且当 $\zeta(y)$ 满足 $\mathrm{supp}\ \zeta \subset \omega$ 时，有

$$|\ \widehat{\zeta u}\ (\eta)| \leq C_N(1 + |\eta|)^{-N},\ \forall\ \eta \in V. \tag{2.1.12}$$

易见，$\phi(x)$ 以及相应的 $\phi_1(y)$、$\phi_2(y)$ 的支集均可取得充分小，从而可有 $\mathrm{supp}\ \phi_2 \subset \omega$，于是将(2.1.12)中 $\zeta$ 换成 $\phi_2$ 时，该估计式仍成立.

今将(2.1.11)中在 $R^n_\eta$ 上的积分写成在 $V$ 与 $R^n_\eta\backslash V$ 上积分之和，对于 $V$ 上的积分，作算子 $L_1$ 为

$${}^tL_1 = i\sum_j \frac{\partial_{y_j}\langle\psi^{-1}(y), \xi\rangle}{|\nabla_y\langle\psi^{-1}(y), \xi\rangle|^2}\partial_{y_j},$$

它的分母在 $\xi \neq 0$ 时不为 0. 现对任意的 $M$，取 $N = M + n + 1$，由

于 $\widehat{\phi_2 u}$ 在 $V$ 中速降，故 $\eta\in V$ 时，$|\widehat{\phi_2 u}(\eta)|\leq C_N(1+|\eta|)^{-N}$. 由此知

$$\begin{aligned}
&\int_V\int_{R_y^n}\mathrm{e}^{-i(\langle\phi^{-1}(y),\xi\rangle-\langle y,\eta\rangle)}\phi_1(y)\mathrm{d}y\,\widehat{\phi_2 u}(\eta)\mathrm{d}\eta \\
&=\int_V\left|\int_{R_y^n}\mathrm{e}^{-i\langle\phi^{-1}(y),\xi\rangle}L_1^M(\mathrm{e}^{-i\langle y,\eta\rangle}\phi_1(y))\mathrm{d}y\right|\cdot|\widehat{\phi_2 u}(\eta)|\mathrm{d}\eta \\
&\leq\int_V(1+|\xi|)^{-M}(1+|\eta|)^M|\widehat{\phi_2 u}(\eta)|\mathrm{d}\eta \\
&\leq C(1+|\xi|)^{-M}.
\end{aligned}$$

所以这一项在$|\xi|\to\infty$时是速降的.

再考察 $R_\eta^n$ 上的积分，由于

$$|\nabla_y(\langle\phi^{-1}(y),\xi\rangle-\langle y,\eta\rangle)|\geq C(|\xi|+|\eta|),$$

从而可作算子 $L_2$，使

$${}^tL_2=\sum_j\frac{i\partial_{y_j}(\langle\phi^{-1}(y),\xi\rangle-\langle y,\eta\rangle)}{|\nabla_y(\langle\phi^{-1}(y),\xi\rangle-\langle y,\eta\rangle)|^2}\partial_{y_j}.$$

由于 $\widehat{\phi_2 u}(\eta)$ 在 $|\eta|\to\infty$ 时缓增，故存在某个 $N_0$，使

$$|\widehat{\phi_2 u}(\eta)|\leq C(1+|\eta|)^{-N_0}.$$

从而取 $N=M+N_0+n+1$，在 $|\xi|\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{R_\eta^n\setminus V}\left(\int_{R_y^n}\mathrm{e}^{-i(\langle\phi^{-1}(y),\xi\rangle-\langle y,\eta\rangle)}(L_2)^N\phi_1\mathrm{d}y\right)\widehat{\phi_2 u}(\eta)\mathrm{d}\eta\right| \\
&\leq\int_{R_\eta^n\setminus V}(1+|\xi|+|\eta|)^{-M-N_0-n-1}(1+|\eta|)^{N_0}\mathrm{d}\eta \\
&\leq C(1+|\xi|)^{-M},
\end{aligned}$$

所以第二项在$|\xi|\to\infty$ 时也速降. 综合对此两项的分析，可知 $I$ 速降，从而由波前集的定义知

$$(x, \xi) \notin WF(\psi^* u). \tag{2.1.13}$$

上式说明：

$$WF(\psi^* u) \subset \{(x, \xi);\ (\psi(x), ({}^t\psi')^{-1}\xi) \in WF(u)\}. \tag{2.1.14}$$

显然，由于 $\psi$ 为 $C^\infty$ 同胚映射，故与(2.1.14)成反向的包含关系也成立，这就得到了(2.1.10)式. □

定理 2.1.5 告诉我们，在进行自变量变换时，分布的波前集将按余切丛上的坐标变换规律作相应的变化，所以对于定义在一个微分流形上的分布，可以在它的余切丛上定义它的波前集. 当微分流形局部地被坐标化为一个 Euclid 空间中的开集 $\Omega$ 时，波前集即按相应的变换规律对应于 $T^*(\Omega)$ 的一个锥子集.

当考虑到拟微分算子对分布的作用时，有以下定理：

**定理 2.1.6** 若 $A$ 为拟微分算子，其象征 $a \in S^\infty(\Omega)$，$u \in \mathscr{E}'(\Omega)$，则

$$WF(Au) \subseteq WF(u),\ WF(u) \subseteq WF(Au) \cup \mathrm{Char}(A), \tag{2.1.15}$$

其中 Char $A$ 表示算子 $A$ 的特征集，即所有使 $a(x, \xi) = 0$ 的点 $(x, \xi)$ 的集合.

**定理 2.1.7** 若 $u(t, x) \in C^\infty((\alpha, \beta), \varepsilon'(\Omega_x))$，$A = a(x, D_x)$ 为定义于 $\Omega_x$ 上的拟微分算子. 又设 $(t_0, x_0; \tau_0, \xi_0) \notin WF(u)$，则 $(t_0, x_0; \tau_0, \xi_0) \notin WF(Au)$.

这两个定理的证明可参见文献[52].

以上所述及的波前集都是用以描述在 $C^\infty$ 框架下分布的奇性. 有时也需要描述分布的有限阶奇性，即对某个实数 $s$，分布 $u$ 为 $H^s$ 函数，就称 $u$ 按 $H^s$ 的意义光滑；反之，就称 $u$ 具有 $H^s$ 意义下的奇性. 这时相应的波前集 $WF_s(u)$ 有如下定义：

**定义 2.1.3** 对于分布 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$，它的 $s$ 阶波前集 $WF_s(u)$ 可以按其余集来定义. 若 $T^*(\Omega)$ 中 $(x_0, \xi_0) \notin WF_s(u)$，则存在 $x_0$

的邻域 $\omega$，$\xi_0$ 的锥邻域 $V$，使得对任一 $\phi\in C_0^\infty(\omega)$，有

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\ \widehat{\phi u}\in L^2(V). \qquad (2.1.16)$$

利用波前集 $WF(u)$ 还可定义分布 $u$ 在微局部意义下的 Sobolev 正则性. 当且仅当 $(x_0, \xi_0)\notin WF_s(u)$ 时，我们说 $u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$（或 $u\in H^s(x_0, \xi_0)$）. 由拟微分算子的性质易知，若 $u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$，$A$ 为 $m$ 阶拟微分算子，则 $Au\in H^{s-m}_{(x_0,\xi_0)}$.

显然，波前集和微局部 Sobolev 正则性是同一对象的两个侧面. 此外还可以用另一种方式来描写函数的微局部正则性. 对于给定的分布 $u$，它的正则性函数 $S_u(x, \xi)$ 定义为（参见文献[80]）：

$$s_u(x, \xi)=\sup\{s;\ u\in H_s(x, \xi)\}. \qquad (2.1.17)$$

易见，正则性函数为下半连续函数. 对于固定的 $(x_0, \xi_0)$ 与任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在 $x_0$ 的邻域 $\omega$ 与 $\xi_0$ 的邻域 $V$，使对一切 $\phi(x)\in C_0^\infty(\omega)$ 有

$$\widehat{\phi u}\ (\xi)(1+|\xi|^2)^{(s(\xi)-\varepsilon)/2}\in L^2(V). \qquad (2.1.18)$$

在某些场合，用正则性函数来描写分布的奇性更为方便. 例如，在第3章中讨论非线性方程解的奇性干扰时，就要用到正则性函数.

## §2.2 主型方程的奇性传播定理

基于上节中对于函数奇性的新的认识，现在来讨论偏微分方程解的奇性传播的特性. 首先当然是讨论线性方程的情形，因为在这种情形下，方程的特征是已知的. 相应的定理的叙述与证明要简单些. 在此我们仅限于讨论具有单特征方程的情形.

关于偏微分方程的解按波前集来描述的奇性传播定理，是微局部分析理论中的一个基本结果，它已有多种证明方法. 下面的证明是由 L. Nirenberg 给出的（见文献[103]）. 在第5章中还将用微

局部能量估计方法再次证明这个奇性传播定理.另外的证明还可以参见文献[78]和[79]等.

记 $D_j=\frac{1}{i}\partial_{x_j}$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$. 设 $P=p(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha$ 为一给定的 $m$ 阶偏微分算子,它的主象征 $p_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\xi^\alpha$ 为实值函数,则称

$$H_{p_m}=\left\{\frac{\partial p_m}{\partial\xi_1},\cdots,\frac{\partial p_m}{\partial\xi_n},-\frac{\partial p_m}{\partial x_1},\cdots,-\frac{\partial p_m}{\partial x_n}\right\}\quad(2.2.1)$$

为 $p_m(x,\xi)$ 的(或算子 $P$ 的)Hamilton 向量场.这个向量场的积分曲线为如下方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\partial p_m}{\partial\xi_j}\\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{\partial p_m}{\partial x_j}\end{cases}(j=1,\cdots,n)\quad(2.2.2)$$

的解,称为次特征带,它在 $x$ 空间上的投影就是次特征线(在不至于产生混淆的情形下,这两者都可简称为次特征).显然,若 $(x_0,\xi_0)$ 满足 $p_m(x_0,\xi_0)=0$, $(x(s),\xi(s))$ 为过 $(x_0,\xi_0)$ 的次特征带,则由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}p_m(x(s),\xi(s))=\sum_j\left(\frac{\partial p_m}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial p_m}{\partial\xi_j}\frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}s}\right)=0,\quad(2.2.3)$$

故有 $p_m(x(s),\xi(s))\equiv0$,这样的次特征带称为零次特征带.

称满足 $p_m(x,\xi)=0$ 的点 $(x,\xi)$ 的全体为算子 $P$ 的特征集.本节所讨论的算子 $P$ 满足条件:在该算子的特征集上 $\nabla_\xi p_m(x,\xi)\neq0$,这样的算子称为主型算子(也称为狭义主型算子).我们熟悉的双曲型算子便是主型算子的一个特例.由(2.2.2)知,在主型算子的次特征带上的任一点都有 $\sum\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}s}\right)^2\neq0$. 这时,因为算子 $P$ 的次特征线是次特征带的投影,在次特征线上也有 $\sum\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}s}\right)^2\neq0$.

故此时次特征线不可能退化为一点.

由主型算子 $P$ 所导出的偏微分方程 $P_u = f$ 称为主型方程. 对此我们有如下定理:

**定理 2.2.1** 设 $P$ 是上面所述定义在区域 $\Omega$ 中的具有 $C^\infty$ 系数的狭义主型偏微分算子, $u$ 是方程 $Pu = f$ 的实解, $f \in C^\infty(\Omega)$, $A_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega)$ 满足 $p_m(x_0, \xi_0) = 0$, $\gamma$ 是过 $A_0$ 的次特征带, 则由 $A_0 \notin WF(u)$ 可推知 $\gamma \cap WF(u) = \varnothing$.

**证明** 只需局部地证明上述结果,因为不难综合局部的结果而导得定理所要求的结论. 以下的证明主要由两步组成:第一步是对算子 $P$ 作分解,将问题化成一阶算子的情形;第二步对一阶算子证明本定理. 首先,由狭义主型的假设知 $\nabla_\xi p_m(x, \xi) \neq 0$, 不妨设 $\partial p_m / \partial \xi_n \neq 0$. 于是可设 $p_m(x, \xi)$ 具有形式

$$p_m(x, \xi) = \xi_n^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-k}(x, \xi')\xi_n^k. \qquad (2.2.4)$$

由于 $p_m(x, \xi)$ 作为 $\xi_n$ 的多项式在 $A_0(x_0, \xi_0)$ 处有单根,所以 $p_m(x, \xi)$ 可以因式分解为

$$p_m(x, \xi) = (\xi_n - \lambda(x, \xi'))q_{m-1}(x, \xi), \qquad (2.2.5)$$

其中 $\lambda(x, \xi')$ 是 $\xi'$ 的齐一次函数, $q_{m-1}(x, \xi)$ 为 $\xi$ 的齐 $m-1$ 次函数,且 $q_{m-1}(x_0, \xi_0) \neq 0$. 以下将证明(2.2.5)有算子 $P$ 的因式分解:

$$P = (D_{x_n} - \sigma(x, D_{x'}))Q + R, \qquad (2.2.6)$$

其中 $R$ 是一个象征的渐近展开为零的拟微分算子, $\sigma$ 与 $Q$ 分别为一阶与 $m-1$ 阶算子, $\sigma(x, D_{x'})$ 的主象征为 $\lambda(x, \xi')$, $Q$ 为 $D_{x_n}$ 的多项式.

为证明(2.2.6),我们将 $\sigma$ 与 $Q$ 的象征写成

$$q(x, \xi', \xi_n) \sim q_{m-1} + q_{m-2} + \cdots,$$

$$\sigma(x, \xi') \sim \lambda(x, \xi') + \sigma_0 + \sigma_{-1} + \cdots.$$

其中 $q_j$ 是 $\xi$ 的 $j$ 次齐次函数，且是 $\xi_n$ 的多项式，而 $\sigma_j$ 是 $\xi'$ 的 $j$ 次齐次函数. 为决定这些象征，我们写出(2.2.6)中诸项的象征展开式，并比较等式中的各齐次项. 对于 $m-1$ 次项，有

$$
\begin{aligned}
&-\sigma_0 q_{m-1} + D_{x_n} q_{m-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{\xi_j} \lambda D_{x_j} q_{m-1} + (\xi_n - \lambda) q_{m-1} \\
&\quad = p_{m-1}. \qquad (2.2.7)
\end{aligned}
$$

令 $\xi_n = \lambda(x, \xi')$，由于 $q_{m-1} \neq 0$，故有

$$
\sigma_0 = \frac{1}{q}\Big[D_{x_n} q_{m-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{\xi_j} \lambda D_{x_j} q_{m-1} - p_{m-1}\Big]_{\xi_n = \lambda(x, \xi')}, \qquad (2.2.8)
$$

将它代入(2.2.7)式，约去 $\xi_n - \lambda$ 因子，可以定出 $q_{m-2}$. 继续比较 $m-2$ 次的项，可以得 $\sigma_{-1}$与 $q_{m-3}$，如此继续下去，即可以得到 $\sigma(x, \xi')$ 与 $q(x, \xi)$ 的渐近展开. 由此易得这些渐近展开的和以及相应的拟微分算子 $\sigma$ 和 $Q$.

利用算子 $P$ 的因子分解(2.2.6)式可以把满足 $Pu \in C^\infty$ 的函数 $u$ 的奇性传播问题化成满足 $(D_{x_n} - \sigma(x, D_{x'}))v \in C^\infty$ 的函数 $v$ 的奇性传播问题来处理. 事实上，由 $WF(Qu) \subset WF(u)$ 与 $A_0 \notin WF(u)$ 知 $A_0 \notin WF(Qu)$. 由(2.2.6) 知

$$
(D_{x_n} - \sigma(x, D_{x'}))Qu = Pu - Ru \in C^\infty. \qquad (2.2.9)
$$

此外，因为 $q_{m-1}(x, \xi) \neq 0$，故在 $\xi_n - \lambda(x, \xi') = 0$ 时，向量场 $H_{p_m}$ 与 $H_{\xi_n - \lambda}$成正比，这表明 $p_m(x, \xi)$与 $\xi_n - \lambda(x, \xi')$的次特征是一致的，所以，若能证明定理对一阶算子成立，即 $WF(Qu)$ 与算子 $D_{x_n} - \sigma(x, D_{x'})$ 的次特征 $\gamma$ 不相遇，就可立即推出 $WF(u) \cap \gamma = \varnothing$的结论.

于是，问题化成对一阶算子证明本定理. 以下的作法是构造一个零阶拟微分算子 $B$，它的主象征 $b_0(x, \xi)$沿着 $\gamma$ 不等于零，且 $Bu \in C^\infty$. 注意到

$$PBu = BPu + [P, B]u, \tag{2.2.10}$$

而 $Pu \in C^\infty$. 故若能设法选取 $B$ 的象征 $b(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{-j}(x, \xi)$，使交换子$[P, B]$的象征为零，则由$[P, B]u$ 与 $Pu$ 为 $C^\infty$，就可导致 $PBu \in C^\infty$.

使 $[P, B]$ 的象征为零的要求就导致

$$\frac{1}{i}H_{p_1}b_0 = 0,$$

$$\frac{1}{i}H_{p_1}b_{-1} + \frac{1}{i}H_{p_0}b_0 + \sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha p_1 \cdot D_x^\alpha b_0 - \partial_\xi^\alpha b_0 \cdot D_x^\alpha p_1)$$
$$= 0,$$

$$\cdots\cdots \tag{2.2.11}$$

由于 $H_{p_1}$的方向与平面 $x_n = \text{const.}$ 横截，故若在 $x_n = x_{n0}$ 上给定 $b_{-j}$ $(j \geq 0)$ 的初值，(2.2.11)中的方程都是可解的. 我们将选定这些初值，使得当 $x_n$ 充分接近于 $x_{n0}$时，$Bu \in C^\infty$. 如果做到了这一点，则利用双曲型方程的特性可知 $Bu$ 在 $\Omega \cap \{x_n > 0\}$ 区域中为$C^\infty$函数. 再注意到 $B$ 的主象征在 $\gamma$ 上不为零，即有 $\gamma \cap WF(u) = \varnothing$，这就是所需证明的.

剩下的工作是选取 $b_{-j}$的初值，使 $Bu$ 在初始时刻附近为 $C^\infty$. 这时利用定理的条件 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$. 这条件等价于存在$(x_0, \xi_0)$的邻域 $\omega$，使 $\omega \cap WF(u) = \varnothing$. 于是，可以选取一个零阶拟微分算子 $A$，使得 $A$ 的象征 $a(x, \xi)$ 的支集在 $\omega$ 中，且在$(x_0, \xi_0)$的更小邻域 $\omega_1 \Subset \omega$ 中恒等于 1. 于是由定理 2.1.6 知 $Au \in C^\infty$. 接着，可选取 $b_0$，使它为一次齐次函数，且其支集含于使 $a(x, \xi) \equiv 1$ 的区域中，又 $b_0(x, \xi)$ 在 $(x_0, \xi_0)$ 的更小的邻域中等于 1. 对于 $b_{-j}(j \geq 1)$，取其初值为零. 易见，在这样的初值选取下，在 $x_n$ 充分地接近 $x_{n0}$ 时，$B(I-A)$ 的象征为零，从而有

$$Bu = B(I - A)u + BAu \in C^\infty.$$

于是定理得证. □

这个定理说明,若 $A_0$ 为解 $u$ 的正则点,则过 $A_0$ 的整个次特征上的所有点都是正则的. 它也可概括为:主型方程的解的微局部正则性沿次特征传播,或解的奇性沿着次特征带传播.

当考虑 $H^s$ 意义下的奇性传播时,我们用一阶双曲型算子 Cauchy 问题的 $H^s$ 正则性定理代替它的 $C^\infty$ 正则性定理来证明相应的结果. 由于一阶双曲型算子在空间 $H^s$ 中有能量不等式成立,所以用相仿的方法可以证得如下定理:

**定理 2.2.2** 设 $P$ 是以上所述定义在区域 $\Omega$ 中的狭义主型偏微分算子,$u$ 是方程 $Pu=f$ 的实解,$f\in H^{s+m-1}(\Omega)$,$A_0=(x_0,\xi_0)\in T^*(\Omega)$ 满足 $p_m(x_0,\xi_0)=0$,$\gamma$ 是过 $A_0$ 的次特征带,则由 $A_0\notin WF_s(u)$ 可推知 $\gamma\cap WF_s(u)=\varnothing$.

**注** 在$(x,\xi)$空间中记 $\sum\xi_i(\partial/\partial\xi_i)$ 的方向$(0,\cdots,0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$为 $\lambda$. 如果 $H_{p_m}$与方向 $\lambda$ 不平行,则称 $P$ 为广义主型算子. 本节中所述奇性传播定理还可以推广到广义主型算子的情形. 但在其证明中要利用 Fourier 积分算子将所考虑的微分算子进行简化,故在此从略. 有兴趣的读者可参见文献[78]和[108]等.

对于偏微分方程的 Cauchy 问题,也可以证明初始条件的奇性沿着次特征传播的结论. 由于主型算子可以利用定理 2.2.1 中所述的方法进行分解,故我们先考察一阶偏微分方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}(D_{x_n}-\sigma(x,D_{x'}))u=f;\\ u(x',0)=u_0(x),\end{cases}\tag{2.2.12}$$

其中 $x=(x',x_n)$,$\sigma$ 为 $C^\infty$ 依赖于 $x_n$ 的拟微分算子,它的一阶主象征 $\lambda(x,\xi)$ 为实函数. 有如下定理:

**定理 2.2.3** 设 $(x_0',\xi_0')\notin WF(u_0)$,$f\in C^\infty([0,\varepsilon)\times R_{x'}^{n-1})$,又记 $\gamma$ 为象征 $\xi_n-\lambda(x,\xi')$ 的通过$(x_0',0,\xi_0',\lambda(x_0',0,\xi_0'))$的零次特征,则

$$\gamma \cap WF(u) = \varnothing, \quad 若\ 0 < x_n < \varepsilon; \tag{2.2.13}$$

$$\gamma(s) \cap WF(u|_{x_n=s}) = \varnothing, \quad 若\ 0 \le s < \varepsilon. \tag{2.2.14}$$

**证明** 先对定理的结果作些说明：(2.2.13)与 (2.2.14) 都表示在 $\gamma$ 上函数 $u$ 无奇性，但在两个式子中，波前集的概念略有不同，在(2.2.13)中 $u$ 是作为变量($x'$, $x_n$)的函数出现的，它的波前集是 $R^n_x \times R^n_\xi$ 中的子集. 而在(2.2.14)中 $u$ 是 $x'$ 的函数，并以 $x_n$ 为参数，它的波前集是 $R^{n-1}_x \times R^{n-1}_\xi$ 中的子集，并随参数 $x_n$ 而变化.

定理 2.2.3 的证明与定理 2.2.1 证明的后半部分十分相似. 故以下只作简述. 利用(2.2.11)可以作算子 $B(x, D_{x'})$，使它的象征支集局限于 $\gamma$ 的邻域中，且在 $\gamma$ 上不为零. 此外，还使$[D_{x_n} - \sigma(x, D_{x'}), B]$的象征为零，而且 $B(x', 0, D_{x'})u_0 \in C^\infty$. 将 $B$ 作用于方程(2.2.12)的两端，可得

$$(D_{x_n} - \sigma(x, D_{x'}))Bu = f + [D_{x_n} - \sigma(x, D_{x'}), B]u,$$

于是，利用双曲型方程初值问题的结果可知 $Bu \in C^\infty$.

对于$[0, \varepsilon)$中的任一 $s$，作为 $R^{n-1}_{x'}$中的拟微分算子 $B(x', s, D_{x'})$ 的象征在 $\gamma(s)$ 上不为零，故由波前集的性质知 $\gamma(s) \notin WF(u|_{x_n=s})$，这就是(2.2.14).

为证 $u$ 满足(2.2.13)，在此作算子 $B$ 的拟逆算子 $A(x', x_n, D_{x'})$，它也 $C^\infty$地依赖于 $x_n$，于是由定理 2.1.7 可知，对 $0 < s < \varepsilon$，有

$$\gamma \cap WF(ABu) = \varnothing. \tag{2.2.15}$$

但 $ABu = u + Ru$，其中 $Ru$ 关于 $x'$ 与 $x_n$ 均为 $C^\infty$函数，所以 $u$ 也满足(2.2.13). □

利用定理 2.2.1 中所述的算子因式分解的方法，可以由定理 2.2.3 推得高阶方程的 Cauchy 问题的奇性传播定理. 以下就双曲型方程的情形给出定理的形式.

**定理 2.2.4** 设 $P$ 为 $m$ 阶双曲型微分算子，它的主象征

$p_m(x, \xi)$作为$\xi_n$的多项式有$m$个单实根$\lambda_1(x, \xi'), \cdots, \lambda_m(x, \xi')$. $u$为Cauchy问题

$$\begin{cases} Pu = f; \\ \partial^{k-1}u|_{x_n=0} = u_{k0}(x') \quad (k = 1, \cdots, m) \end{cases} \tag{2.2.16}$$

的解. 又$(x_0', \xi_0') \notin WF(u_0)$, $f \in C^\infty([0, \varepsilon) \times R_{x'}^{n-1})$, $\gamma_i$为由$(x_0', 0, \xi_0', \lambda_{i0})$出发的对应于实根$\lambda_i$的零次特征,其中$\lambda_{i0} = \lambda_i(x_0', 0, \xi_0')$,则对$i = 1, \cdots, n$,以$\gamma_i$代替$\gamma$时(2.2.13)和(2.2.14)仍成立.

作为上述定理的应用,现在来回答第1章中提出的问题:对于二维波动方程的Cauchy问题(1.2.1),若$\psi(x, y)$取为$\delta(x, y)$,则$WF(\psi) = (0, 0; \xi_0, \eta_0)$,其中$(\xi_0, \eta_0)$为任意方向. 不妨设$(\xi_0, \eta_0)$已标准化,即$\xi_0^2 + \eta_0^2 = 1$,则过$(t, x, y, \tau, \xi, \eta) = (0, 0, 0, 1, \xi_0, \eta_0)$的次特征为

$$x = \xi t,\ y = \eta t,\ \tau = 1,\ \xi = \xi_0,\ \eta = \eta_0,$$

它在$(t, x, y)$空间中的投影为

$$x = \xi t,\ y = \eta t,\ \text{其中}\ \xi^2 + \eta^2 = 1. \tag{2.2.17}$$

于是,初值在原点的奇性就将沿着过原点的一切射线(2.2.17)往$t > 0$区域中传播,故解$u$的奇性集就是过原点的特征锥面. 可是,当$\psi(x, y)$取为$\theta(x)$时,$WF(\psi) = (0, y; \xi, 0)$,其中$\xi$可以取为任意实数(实际上由齐次性知,它取$\pm 1$就够了). 这时,按照定理2.2.4知,所有以集合$WF(\psi)$中的点为出发点的次特征在$(t, x, y)$空间中的投影为$\{x = \pm t, -\infty < y < \infty\}$,即恰好织成平面$x = \pm t$. 这些次特征线并不进入楔状区域$-t < x < t$的内部,所以$u_\theta(t, x, y)$在该区域的内部也不应该有奇性. 可见,在第1章中所见到的现象与一般奇性传播定理所推得的结论完全一致.

再来看Huygens构图原理,我们取§1.1末的例子进行讨论.

设曲面 $\psi(x_1, x_2, x_3) = t$ 是时刻 $t$ 波阵面所到达的位置，其中 $\psi(x_1, x_2, x_3)$满足(1.1.28). 今用波前集的传播来描述这个传播过程. 我们知道，3 维波动方程 $u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = 0$ 的次特征带方程是

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \tau, \quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = -\xi_i;$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}s} = 0.$$

将 $t$ 与 $s$ 取成一致，它的积分是

$$x_i = p_{i0}s + x_{i0}, \ \xi_i = p_{i0} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.2.18}$$

这正与第 1 章的(1.1.31)相一致. 因此，第 1 章中所说的曲面 $\psi(x_1, x_2, x_3) = t$ 随着 $t$ 的增加而移动，正是奇性沿着次特征带传播的过程(在 $x$ 空间中所看到的是这个传播过程的投影).

在 Huygens 构图法中，要求由曲面 $\psi(x_1, x_2, x_3) = t$ 上每一点为球心作一个半径为 $t'$ 的球，再取这些球面的包络，面以包络面作为 $t + t'$ 时刻的波阵面. 上述球面族的方程为

$$\sum (X_i - x_i)^2 = t'^2, \tag{2.2.19}$$

其中$(x_1, x_2, x_3)$满足 $\psi(x_1, x_2, x_3) = t$. 如将 $x_1$ 和 $x_2$ 视为参数，并将(2.2.19)对参数求导，可得

$$(X_1 - x_1) + (X_3 - x_3)\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0,$$

$$(X_2 - x_2) + (X_3 - x_3)\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0.$$

而由方程 $\psi(x_1, x_2, x_3) = t$ 可得

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\frac{\psi_{x_1}}{\psi_{x_3}}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = -\frac{\psi_{x_2}}{\psi_{x_3}},$$

因此有

$$(X_1 - x_1) : \psi_{x_1} = (X_2 - x_2) : \psi_{x_2}$$

$$= (X_3 - x_3) \cdot \psi_{x_3}$$
$$= k.$$

将它代入(2.2.19)得到 $\sum \psi_{x_i}^2 = \frac{t'^2}{k^2}$，故从 $\psi$ 所满足的方程(1.1.28)即知 $k = t'$. 这样，在包络面上的点 $(X_1, X_2, X_3)$ 应当满足

$$X_1 = x_1 + \psi_{x_1} t',\ X_2 = x_2 + \psi_{x_2} t',\ X_3 = x_3 + \psi_{x_3} t'. \tag{2.2.20}$$

易见，若不计记号的差别，(2.2.20)与(2.2.18)是一致的，它正是次特征带的方程在底空间上的投影，所以 Huygens 构图法也可用一般的奇性传播定理推出. 也就是说，我们已用本节中得到的奇性传播定理证实了 Huygens 构图法的合理性. 而且由上面的分析可知，由于波前集中所含的方向要素决定了次特征的方向，奇性只沿着次特征传播，不会扩散到球面族(2.2.19)的所有点上. 此外，由(2.2.20)也可见，若 $c > 0$，则 $t' = c$ 与 $t' = -c$ 分别对应于球面族(2.2.19)不同的两个包络面. 它们是波阵面在时刻 $t + c$ 与 $t - c$ 的位置.

## § 2.3 奇性在边界上的反射

在上一节中，讨论的是偏微分方程的解在其存在区域内部的奇性传播定理. 如果在一个有边界的区域中考察偏微分方程的解，当载有解的奇性的次特征线遇上了区域的边界，在边界附近奇性分布的情形将是如何呢？这样的问题称为奇性反射问题. 这时，在边界附近解的奇性分布自然与所考察的偏微分方程的边界条件的给定方式有关，同时与载有奇性的次特征线和边界的相交方式也有关. 本书中主要考察次特征线与边界横截相交的情形.

在此局限在区域边界的附近来讨论偏微分方程的解. 若边界是 $C^\infty$ 光滑的，则可以通过一个 $C^\infty$ 的同胚变换而将它展平. 由于所

考察的偏微分方程在此同胚变换下不改变类型，方程的特征与次特征，函数的波前集都按同胚变换所诱导的法则相互对应，故不妨假设边界已经展平，并记为 $x_n = 0$，所考察的区域为 $x_n > 0$.

以下对一阶偏微分方程组讨论奇性反射问题. 因为一般的高阶方程可以通过 Calderon 变换化到一阶方程组的情形，所以本节中的结果不难推出高阶方程的相应结果. 现在先讨论一阶双曲型方程组的情形：

$$(D_{x_n} - A(x, D_{x'}))U = F, \tag{2.3.1}$$

其中 $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$，$A$ 为 $C^\infty$ 地依赖于 $x_n$ 的 $N \times N$ 的拟微分算子矩阵，它的一阶主象征 $a(x, \xi')$ 具有实特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 它们两两不同，$U$ 和 $F$ 为 $N$ 维向量，且 $F$ 为所考察区域中的 $C^\infty$ 函数. 在边界 $x_n = 0$ 上，$U$ 满足边界条件

$$B(x', D_{x'})U = h, \tag{2.3.2}$$

其中 $B$ 为零阶 $k \times N$ 拟微分算子矩阵，$h$ 为 $k$ 维 $C^\infty$ 向量函数. 为了得到合理的奇性反射的结论，$k$ 的值与诸特征值 $\lambda_j$ 的符号有密切的关系，在下面的奇性反射定理 2.3.1 中可看到这一事实.

为讨论问题(2.3.1)和(2.3.2)的解 $U$ 在边界 $x_n = 0$ 附近的奇性，我们将方程组(2.3.1)化成几乎对角的形状，这样就可应用关于单个方程 Cauchy 问题的结果. 为此，先证明几个引理.

**引理 2.3.1** 设 $E$ 与 $F$ 分别为 $N_1 \times N_1$ 与 $N_2 \times N_2$ 矩阵，$F$ 的特征值与 $E$ 的特征值互相分离，则按 $\varphi(T) = TF - ET$ 所定义的 $\varphi$ 为单映射与满映射.

**证明** 为证引理的结论，只需说明 $\varphi(T) = TF - ET$ 为单映射，即说明由 $TF = ET$ 能推出 $T = 0$. 今若 $E$ 已具有形式 $\mathrm{diag}(E_1, \cdots, E_n)$，其中每个 $E_j$ 为 $\nu_j$ 阶 Jordan 块

$$E_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ 1 & \lambda_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

又记 $T$ 的各行为 $T_1, \cdots, T_n$，于是有

$$TF = ET = \begin{pmatrix} \lambda_1 T_1 \\ T_1 + \lambda_1 T_2 \\ \cdots\cdots \\ T_{\nu_1 - 1} + \lambda_1 T_{\nu_1} \\ \cdots\cdots \end{pmatrix},$$

所以 $T_1F = \lambda_1 T_1$，但 $\lambda_1$ 不是 $F$ 的特征值，故 $T_1 = 0$. 接着可用同样的方法得知 $T_2 = \cdots = T_{\nu_1} = 0$，进而又可知 $T$ 的所有各行均为零，从而 $T = 0$.

对于一般的矩阵 $E$，可作矩阵 $L$ 使得 $\tilde{E} = LEL^{-1}$ 具有 Jordan 标准形. 由于 $TF = (L^{-1}\tilde{E}L)T$，故 $(LT)F = \tilde{E}(LT)$. 根据前面的证明而知 $LT = 0$，从而 $T = 0$. □

**引理 2.3.2** 设有拟微分方程组

$$D_{x_n}V = GV + HV, \tag{2.3.3}$$

其中 $G = \mathrm{diag}(E, F)$ 具有关于 $\xi'$ 为齐一次的象征，$E$ 与 $F$ 分别为 $N_1 \times N_1$ 与 $N_2 \times N_2$ 拟微分算子矩阵，其象征的特征值互不相同，$H$ 为零阶拟微分算子矩阵，则可以找到一个变换 $W = SV$，使得 $W$ 满足

$$D_{x_n}W = GW + \alpha W + RW, \tag{2.3.4}$$

其中 $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$ 为零阶拟微分算子矩阵，而 $R$ 是 $-\infty$ 阶拟微分算子矩阵.

**证明** 设 $W^{(1)} = (I + K_1)V$，其中 $K_1$ 为 $-1$ 阶拟微分算子矩阵，则

$$\begin{aligned} D_{x_n}W^{(1)} &= (I + K_1)GV + (I + K_1)HV + D_{x_n}K_1V \\ &= (I + K_1)(G + H)(I + K_1)^{-1}W^{(1)} + \cdots \\ &= GW^{(1)} + (K_1G - GK_1 + H)W^{(1)} + \cdots, \end{aligned}$$

其中"…"表示$-1$阶拟微分算子作用于$W^{(1)}$.

我们希望选取$A_1$、$A_2$与$K_1$使得

$$K_1G - GK_1 + H = \mathrm{diag}(A_1, A_2) \qquad (2.3.5)$$

能够成立. 记$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$, 取$K_1$为具有形式$\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{pmatrix}$的矩阵,取$A_1 = H_{11}$, $A_2 = H_{22}$. 由于$E$、$F$的特征值各不相同,所以根据引理2.3.1可找到矩阵$K_{12}$、$K_{21}$,使

$$K_{12}F - EK_{12} = -H_{12},\ K_{21}E - FK_{21} = -H_{21}, \qquad (2.3.6)$$

于是$W^{(1)}$满足

$$D_{x_n}W^{(1)} = GW^{(1)} + \mathrm{diag}(A_1, A_2)W^{(1)} + BW^{(1)}, \qquad (2.3.7)$$

其中$B$为$-1$阶拟微分算子矩阵.

再令$W^{(2)} = (I + K_2)W^{(1)}$, 其中$K_2$为$-2$阶拟微分算子矩阵,则有

$$D_{x_n}W^{(2)} = GW^{(2)} + \mathrm{diag}(A_1, A_2)W^{(2)} + (K_2G - GK_2 + B)W^{(2)} + \cdots,$$

其中"…"表示$-2$阶拟微分算子作用于$W^{(2)}$. 与上面的方法相仿,可以适当地选取$B$与$K_2$,使得

$$D_{x_n}W^{(2)} = GW^{(2)} + \mathrm{diag}(A_1, A_2)W^{(2)} + \mathrm{diag}(B_1, B_2)W^{(2)} + \cdots.$$

如此继续下去,余项中的拟微分算子的阶数就越来越低. 再利用由象征的渐近展开构造拟微分算子的方法,可以作无穷乘积:

$$I + K \sim \prod_{l=1}^{\infty}(I + K_l).$$

令$W = (I + K)V$, 即得(2.3.4). □

**引理 2.3.3** 若在方程组

$$(D_{x_n} - A(x, D_{x'}))U = F$$

中，$A$ 为 $C^\infty$ 地依赖于 $x_n$ 的 $N \times N$ 的拟微分算子矩阵，它的一阶主象征 $a(x, \xi')$ 具有两两不同的实特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$. 则存在拟微分算子矩阵 $S(x, D_{x'})$，使 $W = SU$ 满足

$$D_{x_n}W = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)W + RW + SF, \quad (2.3.8)$$

其中 $\sigma_j = \sigma_j(x, D_{x'})$ 具有一阶主象征 $\lambda_j(x, \xi')$，$R$ 为 $-\infty$ 阶拟微分算子矩阵.

**证明** 根据矩阵 $a(x, \xi')$ 的性质，可以找到一个关于 $\xi'$ 为正齐零次的矩阵 $e(x, \xi')$，使

$$e \cdot a \cdot e^{-1} = \tilde{a} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N). \quad (2.3.9)$$

于是，令 $V = EU = e(x, D_{x'})U$，则有

$$D_{x_n}V = \tilde{A}(x, D_{x'})V + HV + EF, \quad (2.3.10)$$

其中，$H$ 为零阶拟微分算子矩阵. 应用引理 2.3.2，就可通过变换 $W = S_1V$ 将方程组(2.3.10)化成(2.3.8)的形式，然后令 $S = S_1E$ 即可. □

利用上面证明的几个引理，可以证明双曲型方程解的奇性反射定理如下：

**定理 2.3.1** 对于问题(2.3.1)与(2.3.2)，若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 为矩阵算子 $A$ 的象征 $a(x, \xi')$ 的 $N$ 个实特征根，它们两两不同. 记 $\gamma_j = (x_j(s); \xi_j(s))$ 为象征 $\xi_n - \lambda_j(x, \xi')$ 的通过 $(x_0', 0; \xi_0', \lambda_j(x_0', 0, \xi_0'))$ 的零次特征，$S$ 为引理 2.3.3 中引入的算子矩阵，它使方程组(2.3.1)几乎对角化. 设在 $x_n = x_{n0}$ 上，$WF(U) \cap \gamma_{j_s} = \varnothing$ 对 $j = j_1, \cdots, j_{N_1}$ 成立. 又设在 $x_n = 0$ 上 $BS^{-1}$ 关于 $W_{i_1}, \cdots, W_{i_{N-N_1}}$ 为椭圆，其中

$$\{i_1, \cdots, i_{N-N_1}\} = \{1, \cdots, N\} \backslash \{j_1, \cdots, j_{N_1}\},$$

则 $WF(U)\cap\gamma_{j_s}=\varnothing$ 对一切 $j$ 成立.

**证明** 由于 $W=SU$ 是一个可逆变换，故定理的结论等价于 $WF(W)\cap\gamma_j=\varnothing$ 对一切 $j$ 成立. 利用引理 2.3.3，可将方程组(2.3.1)作几乎对角化，变换所得的 $W$ 满足

$$D_{x_n}W=\operatorname{diag}(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_N)W+C^\infty \text{ 项}. \qquad (2.3.11)$$

而由于右端的 $C^\infty$ 项并不影响奇性分析，故实际上可以对 $W$ 的各个分量分别处理.

因为当 $i\neq j$ 时算子 $D_{x_n}-\sigma_i(x,\ D_{x'})$ 在 $\gamma_j$ 上为椭圆，故(2.3.11)说明 $i\neq j$ 时，$WF(W_i)\cap\gamma_j=\varnothing$. 从而证明定理结论的关键在于指出 $WF(W_i)\cap\gamma_i=\varnothing$ 对一切 $i$ 成立. 今以 $x_n=x_{n0}$ 上的值为初值，利用本定理的条件以及双曲型方程 Cauchy 问题的奇性传播定理，可知

$$(x_0',\ \xi_0')\notin\bigcup_{s=1}^{N_1}WF(W_{j_s}|_{x_n=0}). \qquad (2.3.12)$$

然而又由于 $BS^{-1}$关于 $W_{i_1},\ \cdots,\ W_{i_{N-N_1}}$ 为椭圆，故由 $BS^{-1}W=h\in C^\infty$ 可得

$$(x_0',\ \xi_0')\notin\bigcup_{s=1}^{N-N_1}WF(W_{i_s}|_{x_n=0}). \qquad (2.3.13)$$

现以 $x_n=0$ 上的值为初值，再次利用定理 2.2.3 得到 $WF(W_{i_s})\cap\gamma_{i_s}=\varnothing$ 对一切 $1\leq s\leq N-N_1$ 成立. 总之，$WF(W)$不与任一 $\gamma_i$ 相遇，从而 $WF(U)$ 也不与任一 $\gamma_i$ 相遇. □

**注** 在定理 2.3.1 的条件中也蕴含了次特征线与边界横截相交的要求. 事实上，$\gamma_i$ 为对应于象征 $\xi_n-\lambda_i(x,\ \xi')$ 的 Hamilton 向量场的积分曲线. 所以，在 $\gamma_i$ 上

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial\xi_n}(\xi_n-\lambda_i(x,\ \xi'))\neq 0,$$

故 $\gamma_i$ 在底空间上的投影与边界 $x_n=0$ 横截.

在定理 2.3.1 中要求方程组(2.3.1)中算子的象征矩阵具有

$N$ 个实特征根，也就是说该方程组关于 $x_n$ 是双曲型的，所以问题(2.3.1)和(2.3.2)实际上是一个初值问题. 即使对双曲型方程组，讨论它的一般边值问题时这个条件也并不满足. 例如对定义在柱形区域 $(0, T) \times \Omega$ 中的波动方程，虽然它关于变量 $t$ 为双曲型的，但对于边界 $(0, T) \times \partial\Omega$ 的法向而言，定理 2.3.1 中"$N$ 个实特征根"的条件就不满足. 在下面的讨论中，我们放弃对形式为(2.3.1)的方程组中微分算子的象征矩阵有 $N$ 个特征根的条件，给出一般情形下的奇性反射定理.

以下所讨论的问题的形式仍为(2.3.1)和(2.3.2)，但设在 $(x_0, \xi'_0)$ 的邻域 $\omega$ 中，矩阵 $a(x, \xi')$ 具有 $N_0$ 个单实根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{N_0}$，$m^+$ 个具有正虚部的复根，$m^-$ 个具有负虚部的复根(在 $a(x, \xi')$ 为实矩阵时，$m^+ = m^-$). 与前一段的讨论相仿，需先将方程组(2.3.1)进行块对角化. 由于引理 2.3.1 对于具有复特征值的矩阵也是成立的，所以按照引理 2.3.2 的作法可以得到如下引理：

**引理 2.3.4** 若 $U$ 为方程组(2.3.1)的解，一阶拟微分算子矩阵 $A(x, D_{x'})$ 的象征 $a(x, \xi')$ 的特征根的分布如上所述. 则存在拟微分算子矩阵 $S(x, D_{x'})$，使 $W = SU$ 满足

$$D_{x_n} W = HW + RW, \tag{2.3.14}$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} \sigma_1(x, D_{x'}) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_{N_0}(x, D_{x'}) & & \\ & & & e^+(x, D_{x'}) & \\ & & & & e^-(x, D_{x'}) \end{pmatrix}.$$

$\sigma_j(x, D_{x'})$ 的主象征为 $\lambda_j(x, \xi')$，$e^+$ 与 $e^-$ 具有一阶复象征，$R$ 为 $-\infty$ 阶拟微分算子矩阵.

于是，为了得到一般情形下的奇性反射的结果，还需讨论椭圆型方程组的边值问题解的正则性.

**定理 2.3.2** 设 $W^+$ 满足

$$\begin{cases}D_{x_n}W^+=E^+W^++F^+;\\ W^+(0)=h^+,\end{cases}\tag{2.3.15}$$

其中 $E^+$ 的主象征 $e^+(x,\xi')$ 为 $\xi'$ 的正齐一次函数，且

$$\mathrm{Im}(\mathrm{spec}(e^+))\geq c_0|\xi|,\ c_0>0.\tag{2.3.16}$$

又设 $(x'_0,\xi'_0)\notin WF(h^+)$，并对于 $0\leq s<\varepsilon$，有 $(x'_0,\xi'_0)\notin WF(F^+|_{x_n=s})$，则对 $0\leq s<\varepsilon$，也必有 $(x'_0,\xi'_0)\notin WF(W^+|_{x_n=\varepsilon})$ 成立.

**证明** 先设 $F^+=0$，以下说明定理中的 $W^+$ 可以写成 $Bh^+$ 的形状，这里 $B=b(x,D_{x'})$ 为零阶拟微分算子，它的象征具有渐近展开式 $b\sim\sum\limits_{j=0}^{-\infty}b_j$，其中每个 $b_j$ 为 $j$ 阶齐次象征，且 $\partial_{x_n}^k b_j$ 为 $j+k$ 阶齐次象征. 为决定这些 $b_j$，将表达式 $W^+=Bh$ 代入方程

$$D_{x_n}W^+=e^+(x,D_{x'})W^+,$$

利用拟微分算子象征的运算法则，可得

$$D_{x_n}b_0-e_1^+b_0=0,$$

$$D_{x_n}b_{-1}-e_1^+b_{-1}=\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^{(\alpha)}e_1^+\cdot D_x^{(\alpha)}b_0+e_0^+b_0,$$

$$\cdots\cdots\tag{2.3.17}$$

取这些象征在 $x_n=0$ 的初值为 $b_0=1$，$b_j=0\ (j\leq-1)$，则所有的 $b_j$ 都可由(2.3.17)决定，例如

$$b_0=\exp\left(i\int_0^{x_n}e_1^+\mathrm{d}x_n\right).$$

利用(2.3.16)式容易验证 $\partial_{x_n}^k b_0$ 为 $k$ 阶象征. 同样可写出 $b_j$ 的表达式，且由此验证 $\partial_{x_n}^k b_j$ 为 $k+j$ 阶象征. 这说明前面将 $W^+$ 写成 $b(x,D_{x'})h^+$ 的作法是可行的. 于是，利用定理 2.1.6 可得本定理

的结论.

对于 $F^+\neq 0$ 的情形, $W^+$ 可以表示为

$$W^+ = b(x, D_{x'})h^+ + \int_0^{x_n} \tilde{b}(x', D_{x'}, s)F^+(x', s)\mathrm{d}s, \tag{2.3.18}$$

其中 $\tilde{b}(x, D_{x'}, s)$ 为 Cauchy 问题

$$\begin{cases} D_{x_n}W^+ = e^+(x, D_{x'})W^+; \\ W^+|_{x_n=s} = F^+(x', s) \end{cases} \tag{2.3.19}$$

的解算子. 它也是零阶拟微分算子, 且 $C^\infty$ 地依赖于参数 $x_n$ 和 $s$. 从而定理的结论在 $F^+\neq 0$ 时仍成立. □

**注** 将定理 2.3.2 中的 $x_n$ 反向, 即可得到对另一类椭圆算子的结论. 对于问题

$$\begin{cases} D_{x_n}W^- = E^-W^- + F^-; \\ W^-(\varepsilon) = h^-, \end{cases} \tag{2.3.20}$$

其中 $E^-$ 的主象征 $e^-$ 为正齐一次象征. 若设

$$\mathrm{Im}(\mathrm{spec}(e^-)) \leq c_1|\xi|, \ c_1 < 0, \tag{2.3.21}$$

又设 $(x_0', \xi_0') \notin WF(h^-)$, 且在 $0 < s \leq \varepsilon$ 时, 有 $(x_0', \xi_0') \notin WF(F^-|_{x_n=s})$, 则对 $0 < s \leq \varepsilon$, 有 $(x_0', \xi_0') \notin WF(W^-|_{x_n=s})$.

结合前面关于双曲情形与椭圆情形的讨论, 可以建立如下的定理:

**定理 2.3.3** 对于问题(2.3.1)和(2.3.2), 若在点 $(x_0', \xi_0')$ 的邻域 $\omega$ 内, 矩阵算子 $A$ 的主象征 $a(x, \xi')$ 有 $N_0$ 个单实特征根, $m^+$ 个具有正虚部的复根, $m^-$ 个具有负虚部的复根. 记 $\gamma_j = (x_j(s); \xi_j(s))$ 为象征 $\xi_n - \lambda_j(x, \xi')$ 的通过 $(x_0', 0; \xi_0', \lambda_j(x_0', 0, \xi_0'))$ 的零次特征, $S$ 为引理 2.3.4 中引入的算子矩阵, 它使方程组(2.3.1)几乎块对角化. 设在 $x_n = x_{n0}$ $(0 < x_{n0} < \varepsilon)$ 处, $WF(U)\cap$

$\gamma_{j_s} = \varnothing$ 对 $j = j_1, \cdots, j_{N_1}$ 成立. 又设 $(x'_0, \xi'_0) \notin WF(h)$, $BS^{-1}$ 关于 $W_{i_1}, \cdots, W_{i_{N_0-N_1}}$, $W^+$ 为椭圆,其中

$$\{i_1, \cdots, i_{N-N_1}\} = \{1, \cdots, N\} \backslash \{j_1, \cdots, j_{N_1}\},$$

则 $WF(U) \cap \gamma_j = \varnothing$ 对一切 $j \leq N_0$ 成立.

**证明** 引入变换 $W = SU$ 后,方程组(2.3.1)即化为几乎块对角的形式. 限制在 $x_n = x_{n0}$ 上考察,因为

$$WF(U|_{x_n = x_{n0}}) \cap \left( \bigcup_{s=1}^{N_1} \gamma_{j_s} \right) = \varnothing,$$

故也有

$$WF(W|_{x_n = x_{n0}}) \cap \left( \bigcup_{s=1}^{N_1} \gamma_{j_s} \right) = \varnothing.$$

以 $x_n = x_{n0}$ 为初始平面,利用对双曲型方程组 Cauchy 问题的定理 2.3.1 可知

$$(x'_0, \xi'_0) \notin \bigcup_{s=1}^{N_1} WF(W_{j_s}|_{x_n = 0}),$$

又利用定理 2.3.2 后面的注可得到

$$(x'_0, \xi'_0) \notin \bigcup_{s=1}^{N_1} WF(W^- |_{x_n = 0}),$$

故在平面 $x_n = 0$ 上 $W_{j_s}(s = 1, \cdots, N_1)$, $W^-$ 都是在 $(x_0, \xi'_0)$ 为微局部正则的. 再根据本定理的条件中在平面 $x_n = 0$ 上 $BS^{-1}$ 的椭圆性假定,有

$$(x'_0, \xi'_0) \notin WF(W^+ |_{x_n = 0}) \cup \left( \bigcup_{s=1}^{N_0 - N_1} WF(W_{i_s}|_{x_n = 0}) \right).$$

再考虑以 $x_n = 0$ 为初始平面的初值问题,利用定理 2.3.1 与定理 2.3.2 可得到

$$\bigcup_{s=1}^{N_0 - N_1} \gamma_{i_s} \cap WF(W) = \varnothing.$$

而由于算子 $S$ 在 $(x'_0, \xi'_0)$ 的邻域中为椭圆,即得到

$$\bigcup_{i=1}^{N_0-N_1} \gamma_{i_i} \cap WF(U) = \varnothing,$$

这就是所需证明的.□

下面以三维波动方程为例,考察光线在边界上的反射与折射.

**例 1** 在区域 $x > 0$ 中,讨论波动方程

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \tag{2.3.22}$$

满足边界条件 $u|_{x=0} = 0$ 的解的奇性在边界 $x = 0$ 附近的特性.

等式(2.3.22)左端波动算子的象征为 $\tau^2 - c^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$. 令 $\Lambda$ 是以 $\lambda = (\tau^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$ 为象征的拟微分算子,$U = (\Lambda u, D_x u)$, 则方程(2.3.22)可化成一阶方程组

$$D_x U = A(D_t, D_y, D_z)U, \tag{2.3.23}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ \Lambda^{-1}(c^{-2}D_t^2 - D_y^2 - D_z^2) & 0 \end{pmatrix},$$

它的主象征为

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1}(c^{-2}\tau^2 - \eta^2 - \zeta^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

易见,矩阵 $a$ 的特征根为 $(c^{-2}\tau^2 - \eta^2 - \zeta^2)^{1/2}$. 对于 $T^*(R^3_{tyz})$上的点$(t, y, z, \tau, \eta, \zeta)$有:

若 $\tau < c(\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$, 则对任意的 $\xi$,象征 $\tau^2 - c^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \neq 0$, 故 $u$ 在 $(\tau, \xi, \eta, \zeta)$ 为微局部正则,从而对任意的 $s > 0$, $u|_{x=s}$ 为微局部正则. 又由 $\tau < c(\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$ 时 $a$ 的特征根是虚数的事实,也可知 $u|_{x=0}$ 在$(\tau, \eta, \zeta)$为微局部正则.

若 $\tau > c(\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$, 则 $a$ 有两个特征根 $\xi_\pm = \pm(\tau^2 - c^2(\eta^2 + \zeta^2))^{1/2}$, 相应地可以作出两条次特征带 $\gamma^+$, $\gamma^-$. 若在 $x$ 充分小时 $WF(u) \cap \gamma^+ = \varnothing$, 由定理 2.3.3 知 $WF(u) \cap \gamma^- = \varnothing$, 反之亦然. 总之,若 $u$ 在次特征带 $\gamma^\pm$ 之一上有奇性,它必定会反射到另一条次特征带上.

将上述次特征带都投影到底空间上，就得到光线在边界 $x = 0$ 上反射的特性. 事实上，若入射线为

$$x = \xi_{+} t,\ y = \eta t + y_0,\ z = \zeta t + z_0;\ t < 0,$$

则反射线为

$$x = \xi\ \ t,\ y = \eta t + y_0,\ z = \zeta t + z_0;\ t > 0.$$

平面 $x = 0$ 的法向为 $(1, 0, 0)$. 显然，由于 $\xi_{+} = -\xi_{-}$，故向量 $(\xi_{+}, \eta, \zeta)$、$(1, 0, 0)$、$(\xi_{-}, \eta, \zeta)$ 在同一平面上，且 $(\xi_{\pm}, \eta, \zeta)$ 与 $(1, 0, 0)$ 的夹角相等. 这就是说：反射线位于入射线和法线所决定的平面内，反射线和入射线分居于法线的两侧，反射角等于入射角. 这正是光学的反射定律的结论.

**例 2**　考察光线在不同介质的界面上的反射与折射：设有两种不同的介质分别处于 $x = 0$ 的两侧，光波在区域 $\pm x > 0$ 中的传播速度为 $c_{\pm}$. 则描写此波动过程的偏微分方程是

$$\begin{cases} u_{tt} - c_{+}^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & x > 0; \\ u_{tt} - c_{-}^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.3.24}$$

在界面 $x = 0$ 上要求 $u$ 及其一阶导数连续. 今如果在 $t < 0$, $x > 0$ 时，$u$ 在"+"介质中某条通到原点的次特征线上有弱奇性. 问以后奇性将传往何处?

从 $t < 0$, $x > 0$ 区域中通到原点的次特征线的全体构成一个过原点的半个特征锥面 $c_{+} t = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $(x > 0)$. 不妨设载有奇性的次特征线 $l$ 在 $(x, y, z)$ 空间中的投影为位于 $xOy$ 平面上的直线 $L$，它过原点且与 $y$ 轴成 $\theta$ 角，其方程为：$y = -x\tan\theta$, $z = 0$，次特征线 $l$ 在 $(t, x, y, z)$ 空间中的方程为：

$$x = -\frac{c_{+}}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} t,\ y = \frac{c_{+} \tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} t,\ z = 0. \tag{2.3.25}$$

为处理这个问题，将全空间区域折叠到 $x > 0$ 上，令

$$\tilde{u}(t, x, y, z) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = {}^t(u(t, x, y, z), u(t, -x, y, z)),$$
$$x > 0, \tag{2.3.26}$$

则$\tilde{u}(t, x, y, z)$就满足

$$\tilde{u}_{1xx} = c_+^{-2}\tilde{u}_{1tt} + \tilde{u}_{1yy} + \tilde{u}_{1zz};$$
$$\tilde{u}_{2xx} = c_-^{-2}\tilde{u}_{2tt} + \tilde{u}_{2yy} + \tilde{u}_{2zz}.$$

而界面上的连接条件即化为

$$\tilde{u}_1(t, 0, y, z) = \tilde{u}_2(t, 0, y, z),$$
$$D_x\tilde{u}_1(t, 0, y, z) = D_x\tilde{u}_2(t, 0, y, z).$$

仍以 $\Lambda$ 记以 $\lambda = (\tau^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$ 为象征的拟微分算子，记

$$U = {}^t(\Lambda\tilde{u}_1, D_x\tilde{u}_1, \Lambda\tilde{u}_2, D_x\tilde{u}_2),$$

则有

$$D_xU = A(D_t, D_y, D_z)U, \tag{2.3.27}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ E_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & 0 & E_- & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_\pm = \Lambda^{-1}(c_\pm^{-2}D_t^2 - D_y^2 - D_z^2),$$

矩阵算子 $A$ 的象征 $a$ 的特征值为 $\pm(c_\pm^{-2}\tau^2 - \eta^2 - \zeta^2)^{1/2}$.

以 $U$ 为未知函数的边值问题的边界条件可以写成：

$$BU = 0, \tag{2.3.28}$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

现在应用定理 2.3.1 和 2.3.3 于这个问题. 首先，经计算可作

出将(2.3.27)化成对角型的算子矩阵$S^{-1}$、$S$,它们的象征分别为：

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ (\lambda e_+)^{1/2} & -(\lambda e_+)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & (\lambda e_-)^{1/2} & -(\lambda e_-)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}(\lambda e_+)^{-1/2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^{-1} & -\frac{1}{2}(\lambda e_+)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda^{-1} & \frac{1}{2}(\lambda e_-)^{-1/2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda^{-1} & -\frac{1}{2}(\lambda e_-)^{-1/2} \end{pmatrix},$$

其中$e_\pm = \lambda^{-1}(c_\pm^{-2}\tau^2 - \eta^2 - \zeta^2)$. 于是$SAS^{-1}$的主象征为：

$$\mathrm{diag}\{e_+,\ -e_+,\ e_-,\ -e_-\}. \tag{2.3.29}$$

在(2.3.27)的次特征带上有下式成立：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \tau, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = c_\pm^2\,\xi, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = c_\pm^2\,\eta, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = c_\pm^2\,\zeta,$$

其中$\tau$、$\xi$、$\eta$、$\zeta$均取常值,满足$\tau^2 - c^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0$. 由特征方程的齐次性,以下不妨取$\tau = 1$. 在前面所说的次特征线$l$上,有

$$\xi = -\frac{c_+^{-1}}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \quad \eta = \frac{c_+^{-1}\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \quad \zeta = 0.$$

对于$(\tau, \eta, \zeta) = \left(1, \dfrac{c_+^{-1}\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, 0\right)$, 矩阵$a$的四个特征值为

$$\frac{\pm c_+^{-1}}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \quad \pm\left(c_-^{-2} - c_+^{-2}\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^{1/2},$$

当 $c_+^2 > c_-^2 \dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ 时，这四个根都是实根. 此时相应的过原点的次特征线在 $(x, y, z)$ 空间中的投影是

$$L_1: y = x\tan\theta,$$

$$L_2: y = -x\tan\theta,$$

$$L_3: y = \frac{c_+^{-1} x\tan\theta}{\sqrt{c_-^{-2} + (c_-^{-2} - c_+^{-2})\tan^2\theta}} x,$$

$$L_4: y = \frac{-c_+^{-1} x\tan\theta}{\sqrt{c_-^{-2} + (c_-^{-2} - c_+^{-2})\tan^2\theta}},$$

其中，直线 $L_2$ 就是入射线的方程.

现在取 $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, 根据 $B$ 与 $S^{-1}$ 的表示式，则有

$$BS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -\lambda & -\lambda \\ \sqrt{\lambda e_+} & -\sqrt{\lambda e_+} & \sqrt{\lambda e_-} & -\sqrt{\lambda e_-} \end{pmatrix},$$

取其第一列与第三列，所得的子矩阵为满秩阵，故可以应用定理 2.3.1，可知 $W_1$、$W_3$ 所对应的 $L_1$、$L_3$ 是由原点往 $y>0$ 方向发出的直线. 若方程(2.3.27)的解在 $L_1$ 和 $L_3$ 上为正则，则根据定理 2.3.1 知，其解必在 $L_2$ 上为正则，因此，反过来说，当 $U$ 在 $L_2$ 上有奇性时，它必定会传播到 $L_1$ 与 $L_3$ 上. 注意到在本例之初所作的折叠变换，回到全空间中的原始方程(2.3.24)，$L_1$ 为 $L_2$ 的反射线，而 $L_3$ 的象

$$L_3': y = \frac{-c_+^{-1}\tan\theta}{\sqrt{c_-^{-2} + (c_-^{-2} - c_+^{-2})\tan^2\theta}} x$$

为 $L_2$ 的折射线.

上面所得到的结果与光的折射定律是一致的，即 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 与平面 $x=0$ 的法线在同一平面上，$L_3'$ 与 $L_2$ 分居于法线的两侧. 又记 $L_3'$ 与 $x$ 轴的夹角为 $\phi$，则有

$$\frac{c_+^{-1}\tan\theta}{\sqrt{c_-^{-2}+(c_-^{-2}-c_+^{-2})\tan^2\theta}}=\tan\psi, \tag{2.3.30}$$

故

$$c_-^{-2}\cot^2\theta+c_-^{-2}-c_+^{-2}=c_+^{-2}\cot^2\psi,$$

从而可得

$$\frac{\sin\theta}{\sin\psi}=\frac{c_+}{c_-}. \tag{2.3.31}$$

这也正是折射定律的结论.

**注** 当 $c_-^{-2}<c_+^{-2}\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ 时,矩阵 $a$ 的四个特征值中有两个是复的. 这时入射光线上的奇性只沿反射线传播,而无折射光线出现. 这就是光学中的全反射现象.

## § 2.4 进一步讨论的问题

在前几节中讨论了线性偏微分方程奇性分析理论中几个最基本的问题. 值得进一步深入讨论的问题是很多的,而且每一类问题都涉及更精细的分析准备与大量细致的运算. 例如对下面两类问题已有深入的研究成果.

**一、奇性在边界上的掠射**

上节中讨论了奇性在边界上的反射. 在讨论中始终假定载有奇性的次特征线与边界是横截的,但是,次特征线与边界相切的情形也是可能发生的. 例如,设 $\omega$ 为 $R^n$ 中的有界域,在 $(R^n\backslash\omega)\times(-\infty,\infty)$ 上考察波动方程的解,则次特征线就可能与边界相切. 这种情形称为*掠射*(glancing). 在掠射情形发生时,由于 § 2.3 中的讨论失效(例如,方程组(2.3.1)中算子 $A$ 的象征不再有 $n$ 个有限的特征值),故在掠射点附近解的奇性分析就更为复杂.

设 $M$ 为带边界的流形,考察

$$\begin{cases}Pu\in C^\infty(M)\\ Bu\in C^\infty(\partial M)\end{cases} \tag{2.4.1}$$

的解的奇性在边界附近的性态. 设 $P$ 是二阶主型算子，边界 $\partial M$ 为非特征，边界条件中 $Bu$ 为 $u$ 或 $(\partial/\partial\nu+\beta)$ 的形式，其中 $\nu$ 为补法向. 为分析解在掠射情形下的奇性，须引入一些记号. 以下不妨设在所考察的邻域中，流形 $M$ 已被坐标化，边界 $\partial M$ 已展平为 $x=0$，在 $M$ 中 $x\geq 0$.

在 $T^*M$ 中定义等价关系"$\sim$"：若两点 $z_1$ 与 $z_2\in T^*M$ 且至少有一个在 $T^*M$ 的内点集中，则当且仅当 $z_1=z_2$ 时，称 $z_1\sim z_2$. 而若 $z_1$、$z_2\in\partial T^*M\backslash N^*\partial M$，则当它们在 $T^*\partial M\backslash 0$ 上的投影相同时，称 $z_1\sim z_2$.

令 $DM=((T^*M\backslash 0)\backslash N^*\partial M)/\sim$，则可以引入投影映射 $b:T^*M\to DM$. 算子 $P$ 的特征点集 $\Sigma(P)=p_2^{-1}(0)$ 在 $DM$ 上投影的象记为 $\Sigma_b$，其中 $p_2p_m$ 为 $P$ 的主象征，则 $\Sigma_b$ 可以写成

$$\Sigma_b^0\cup\Sigma_b^1\cup\Sigma_b^2\cup\cdots\cup\Sigma_b^\infty, \tag{2.4.2}$$

其中

$$\Sigma_b^0=\Sigma_b\cap T^*(M^0)\backslash 0;$$

$$\Sigma_b^1=\{\rho\in\Sigma_b,\ b^{-1}(\rho)\text{ 含两个点}\};$$

$$\Sigma_b^0=\{\rho\in\Sigma_b\backslash(\Sigma_b^0\cup\Sigma_b^1);\text{在 }b^{-1}(\rho)\text{ 上 }H_{p_2}^j x=0$$
$$\text{对一切 }j\leq k-1\text{ 成立},H_{p_2}^k x\neq 0\};$$

$$\Sigma_b^\infty=\{\rho\in\Sigma_b\backslash(\Sigma_b^0\cup\Sigma_b^1);\text{在 }b^{-1}(\rho)\text{ 上 }H_{p_2}^j x=0$$
$$\text{对一切 }j\text{ 成立}\}.$$

记 $\Sigma_b^{(k)}=\bigcup\limits_{j\geq 2}\Sigma_b^j$，则 $G=\Sigma_b^{(2)}$ 是掠射点集. 对 $\Sigma_b^2$ 上使 $H_{p_2}^2>0$ 的点称为绕射点(diffractive point)；使 $H_{p_2}^2<0$ 的点称为滑行点(gliding point)；$\Sigma_b^{(3)}$ 中的点称为高阶掠射点. 绕射点集与滑行点象分别记为 $\Sigma_b^{2-}$ 与 $\Sigma_b^{2+}$. 对掠射点可以作一个几何上的解释. 若在局部坐标下，$P$ 已化成具有主象征 $\xi^2+r(x,y,\eta)$ 的算子，则有 $H_px=2\xi$，$H_p^2x=-2r_x$，所以，在绕射点上 $r_x<0$. 由于算子 $P$ 的次特征由

$$\frac{dx}{ds}=\xi,\ \frac{dy}{ds}=r_\eta,\ \frac{d\xi}{ds}=-r_x,\ \frac{d\eta}{ds}=-r_y$$

所定义，故在绕射点有

$$\frac{dx}{ds}=2\xi=0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\xi}{ds}=-r_x>0.$$

这说明次特征从区域内部到达边界与边界相切后，又回到区域内部. 而对于滑行点，由 $\frac{d^2x}{ds^2}<0$ 知次特征只能外切于边界. 换句话说，在区域内部无次特征可以在滑行点与边界相切. 在高阶掠射点次特征与边界高阶相切.

利用对 $\Sigma_b$ 的分类可以定义广义次特征带如下：

**定义 2.4.1** 广义次特征带是从 $I\backslash B$ 到 $\Gamma\subset\Sigma_b$ 的一个映射 $\gamma$，其中 $I$ 为 $R^1$ 中的一个区间，$B$ 为孤立点集，该映射满足：

1）若 $\gamma(t_0)\in\Sigma_b^0\cup\Sigma_b^{0-}$，则 $\gamma(t)=(x(t),\ y(t),\ \xi(t),\ \eta(t))$ 在 $t_0$ 点可微，且 $\gamma'(t_0)=H_p(\gamma(t_0))$；

2）若 $\gamma(t_0)\in\Sigma_b^{0+}\cup\Sigma_b^{(3)}$，则 $\gamma(t)$ 的投影 $(x(t),\ y(t),\ \eta(t))$ 在 $t=t_0$ 可微，且 $x'(t_0)=0$，$(y'(t_0),\ \eta'(t_0))=H_{r_0}(y(t_0),\ \eta(t_0))$；

3）若 $t_1\in B$，则在 $|t-t_1|>0$ 很小时有 $\gamma(t)\in\Sigma_b^0$，又 $\gamma(t_1\pm0)$ 存在，且为 $\{x=0\}$ 上某点的同一纤维上的不同点.

在此用 $WF_b(u)$ 描述 $u$ 的奇性. 对于不在 $\partial T^*M$ 上的点，$WF_b(u)$ 即 $WF(u)$；对于在 $T^*\partial M$ 上的点，$WF_b(u)$ 是到边界为微局部正则点的余集. 这里，到边界为微局部正则的意义是：对 $(y_0,\ \eta_0)\in T^*\partial M$，能找到在 $(y_0,\ \eta_0)$ 邻域中定义的拟微分算子 $\psi(y,\ D_y)$，使对某个 $\varepsilon>0$，$\psi(y,\ D_y)u(x,\ y)$ 为 $C^\infty([0,\ \varepsilon]\times R^n)$ 函数.

关于问题(2.4.1)的解在掠射点邻域中的奇性分布有以下结论：

**定理 2.4.1** 在上述关于算子 $P$ 与 $B$ 的假定下，若 $u$ 为问题

(2.4.1)的解，$\rho \in WF_b(u)$，则过 $\rho$ 的广义次特征带 $F_\rho(s) \in WF_b(u)$.

易见，当 $\rho \in \Sigma_b^0$ 时，本定理的结论就是定理 2.2.1 所断言的事实. 当 $\rho \in \Sigma_b^1$ 时，本定理的结论可由定理 2.3.3 推出. 当 $\rho \in \Sigma_b^{2-}$ 时，R. Melrose 与 M. Taylor 分别得到了定理 2.4.1 的结论(见文献[91]、[127]). 对于 $\rho \in \Sigma_b^{2+}$ 与 $\rho \in \Sigma^{(3)}$ 的情形，R. Melrose 与 J. Sjöstrand 得到了本定理的结论(见文献[102]). 后来，L. Hömander 在文献[81]中对上述各种情形作了统一的处理与证明.

当(2.4.1)中的算子 $P$ 高于二阶时，可以用算子分解的方法，将高阶算子边值问题的奇性分析归结为二阶算子的情形来处理，并由定理 2.4.1 出发得到相应的结果. 详述从略.

## 二、重特征算子

到现在为止，只对主型算子讨论了奇性分析问题. 若在算子 $P$ 的特征集 $p_m^{-1}(0)$上出现重特征点，即在某点 $(x_0, \xi_0) \in p_m^{-1}(0)$ 上，$\nabla_{x,\xi} p_m(x_0, \xi_0) = 0$，则在$(x_0, \xi_0)$的邻域中 $P$ 不再是主型算子. 这时，在 §2.2 中的讨论方法失效，相应的奇性分析结论也不再适用.

重特征算子又分各种不同的类型. 当$(x_0, \xi_0)$在 $p_m^{-1}(0)$变动时，若特征的重数为常数，则相应的算子称为**常重特征算子**；否则，称为**变重特征算子**. 相比较而言，对常重特征算子的研究要简单一些.

在讨论常重特征算子的奇性分析时，一般都要求算子满足 Levi 条件，这一点与讨论常重特征算子的可解性相仿. 所谓“Levi 条件”，就是对算子象征低阶项的一种限制. 例如，设 $P$ 为重特征的二阶算子，$P$ 的象征为：

$$p(x, \xi) = q(x, \xi)^2 + p_1(x, \xi),$$

其中 $q$ 与 $p_1$ 均为一阶象征，则 Levi 条件就要求在 $q = 0$ 上

$$p_1 - \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial \xi_j}$$

为零阶象征. 于是,存在零阶象征 $h$ 以及相应的拟微分算子 $H$,使

$$p_1 = h_1 q + \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial \xi_j},$$

$$P = Q^2 + HQ + \text{零阶算子}.$$

在一般情形下,若算子 $P$ 的主象征在$(x_0, \xi_0)$的邻域中有分解式:

$$p_m = q_1^{r_1} \cdots q_s^{r_s}, \tag{2.4.3}$$

其中每个 $q_j$ 为狭义主型算子的象征,则 Levi 条件为:

$$e^{-it\varphi} P(ae^{it\varphi}) = O(t^{m-r_j}) \text{ 对 } 1 \le j \le s \text{ 成立}, \tag{2.4.4}$$

其中 $\varphi$ 满足 $\mathrm{d}\varphi(x_0) = \xi_0$, 在$(x_0, \xi_0)$的邻域中 $q_j(x, \mathrm{d}\varphi) = 0$, $a \in C_0^\infty$. 于是可以建立如下定理:

**定理 2.4.2** 设 $P$ 为满足 Levi 条件的常重特征算子,它的象征分解为(2.4.3), $u$ 为方程 $Pu = f$ 的实解,则 $WFu \backslash WFf \subset p_m^{-1}(0)$, 且在 $q_j^{-1}(0)$上 $WFu \backslash WFf$ 在 $H_{q_j}$的 Hamilton 流下不变. 于是,若 $f \in C^\infty$, $(x_0, \xi_0) \notin WFu$, $q_j(x_0, \xi_0) = 0$, $\gamma$ 为过$(x_0, \xi_0)$的次特征,则 $\gamma \cup WFu = \varnothing$.

对有限阶 Sobolev 奇性的传播,有如下定理:

**定理 2.4.3** 设 $P$ 为满足 Levi 条件的常重特征算子,它的象征分解为(2.4.3), $u$ 为方程 $Pu = f$ 的实解,则 $WF_{s+m-r_j} u \backslash WF_s f \subset p_m^{-1}(0)$, 且在 $q_j^{-1}(0)$上, $WF_{s+m-r_j} u \backslash WF_s f$ 在 $H_{q_j}$的 Hamilton 流下不变.

上述两定理的证明可参见文献[30]. 进一步还可给出常重特征算子的奇性反射等结果,详见文献[31].

对于变重特征的情形,奇性分布的性质与特征重数的变化状况有密切关系. 这时须对变重特征算子进行分类研究. 弱双曲算子和全特征算子都是变重特征算子的特例. 关于这些算子,在本书中

不准备详加讨论，读者可参见文献[128]和[77]及该文所引用的文献.

在线性偏微分方程的奇性分析中还有许多课题，例如改变解的奇性类，可以考察解在解析意义下奇性的传播，即解析波前集的传播. 将解析的概念拓广，还可考察 Gevrey 类奇性的传播. 在应用上，奇性传播与散射问题、最优控制问题都有密切联系. 由于篇幅所限，我们不拟讨论这些问题，而从下一章起就转向非线性方程奇性分析的讨论.

# 第 3 章

# 半线性方程的奇性分析

从本章起，主要研究非线性偏微分方程的奇性分析. 非线性偏微分方程解的奇性传播的种种现象，比线性方程的情形更丰富、复杂，其中新的困难主要来自两个方面：一是非线性函数的作用将引起奇性的干扰；另一是方程的特征与解有关，因而作为奇性的承载者特征本身也可能含有奇性. 此外，由于用波前集来描写非线性方程解的奇性也有一些不足之处，对有的情形，还得寻求其他表达方式的方法，所以，从 80 年代起，非线性偏微分方程的奇性分析就成为偏微分方程理论研究中一个十分令人关注的方向. 然而也与非线性方程中其他问题的研究一样，很难像线性情形中那样有一个统一的结果或处理方法. 下面就逐步深入地研究非线性偏微分方程奇性分析的各类问题.

按通常对非线性方程的分类方法，若方程中未知函数的最高阶导数的系数与未知函数无关，则该方程称为*半线性方程*；若方程中未知函数的最高阶导数的系数与未知函数有关，但方程关于未知函数的最高阶导数为线性，则该方程称为*拟线性方程*；在一般情形下，若方程关于未知函数的最高阶导数也是非线性的，则该方程称为*完全非线性方程*. 本章先从半线性方程的情形开始讨论.

## §3.1　$2s$ 弱奇性传播定理

线性方程的奇性传播的基本结果，即本书第 2 章的诸定理，在某些条件下对半线性方程也是适用的. 现在首先对此讨论之.

考察半线性波动方程

$$\Box u = f(u), \tag{3.1.1}$$

其中 $f(u)$为 $u$ 的 $C^\infty$函数. 我们有如下定理:

**定理 3.1.1**　设 $u$ 为(3.1.1)的 $H^s$ 解, $s > \frac{n}{2}$, $\gamma$ 是过$(x_0, \xi_0)$的一条次特征带,则当 $s \leq r \leq 2s - \frac{n}{2}$ 时,可由 $u \in H^r(x_0, \xi_0)$ 推知 $u \in H^r(\gamma)$.

这个定理的证明基于如下的引理:

**引理 3.1.1**　记 $n$ 为空间维数,若 $f(u)$为 $u$ 的 $C^\infty$函数,且当 $\frac{n}{2} < s \leq r \leq 2s - \frac{n}{2}$ 时 $u \in H^r(x_0, \xi_0) \cap H^s$,则 $f(u) \in H^r(x_0, \xi_0)$.

**定理 3.1.1 的证明**　暂设引理 3.1.1 成立,现在证明定理 3.1.1. 下面用的是穿梭法(bootstrap way)——即从某一论断出发,用同一论证方式不断改进这个论断,最终达到命题的要求.

根据定理的条件,可设对某个 $r_1 \geq s$, $u \in H^{r_1}(\gamma)$, 于是由引理3.1.1知,在$r_1 \leq 2s - \frac{n}{2}$ 时,$u$ 的非线性复合 $f(u) \in H^{r_1}(\gamma)$. 取 $r_2 = \min(r_1 + 1, r)$, 则利用线性方程的奇性传播定理(定理 2.2.2)可得 $u \in H^{r_2}(\gamma) \cap H^s$. 这样,就将 $u$ 在 $\gamma$ 上的微局部正则性由 $H^{r_1}$提高到 $H^{r_2}$. 若 $r_2 < r$, 则以 $r_2$ 代替 $r_1$,并又可重复这一过程. 这样一直作下去,直到定理 3.1.1 的结论成立. □

定理 3.1.1 的证明方法是典型的,其主要思想就是把非线性方程解的奇性传播过程分解成线性方程解的奇性传播与将带有奇性的函数作非线性复合这两步. 由于在引理3.1.1以及上一章对线性方程情形的讨论中作了充分的准备,故定理3.1.1的证明就很简捷. 这个定理的证明思路以后常会用到.

引理 3.1.1 说明,在指标 $r$ 和 $s$ 满足所述的条件下,空间 $H^r(x_0, \xi_0) \cap H^s$ 关于非线性复合运算是封闭的. 这类特性在讨论非线性方程解的奇性时十分重要. 以后在其他的函数空间中讨论方程的解时,也常需要证明这类封闭性. 在证明定理 3.1.1 以前,

先来证明空间 $H^s$ 在 $s > n/2$ 时关于非线性复合的封闭性. 在此再次说明,因为函数的奇性是局部的性质,这里和以后所用到的 $H^s$ 空间,都是在局部的意义上而言的.

**引理 3.1.2** (1) 设 $u \in H^s$, $v \in H^t$, $s > n/2$, $0 \leq t \leq s$, 则 $uv \in H^t$;(2) 设 $f(u)$ 为 $u$ 的 $C^\infty$ 函数, $s > n/2$, $u(x) \in H^s$, 则 $f(u(x)) \in H^s$.

**证明** 此引理也称为 Schauder 引理. 利用仿微分算子可以给出一个很简洁的证明. 在情形(1)下,利用附录中定理 A. 11 得

$$uv = T_u v + r^1(u, v), \tag{3.1.2}$$

其中 $T_u$ 为 $H^t$ 到 $H^t$ 的线性算子, $r^1(u, v) \in H^{s+t-n/2} \subset H^t$, 故 (3.1.2)右端两项均属于 $H^t$,从而 $uv \in H^t$.

在情形(2)下,因为 $s > n/2$, 故由附录中定理 A. 20 知, $f(u(x))$ 可以写成

$$f(u(x)) = T_{f'(u)} u(x) + R(x), \tag{3.1.3}$$

其中 $T_{f'(u)}$ 为 $H^t \to H^t$ 的线性连续映射, $t$ 可取任意实数, $R(x) \in H^{2s-n/2}$. 显然,(3.1.3)右端属于 $H^s$,故 $f(u(x)) \in H^s$ 也成立. □

引理 3.1.1 中所叙述的结论比引理 3.1.2 的结论更细致. 作为证明引理 3.1.1 的准备,先证明以下几个命题.

**引理 3.1.3** 设 $K(\xi, \eta)$: $R^n \times R^n \to C^n$ 是一个局部可积函数, 条件

$$\sup_\xi \int |K(\xi, \eta)|^2 d\eta < \infty$$

或

$$\sup_\eta \int |K(\xi, \eta)|^2 d\xi < \infty \tag{3.1.4}$$

至少有一个成立,则映照

$$(g, h) \to \int K(\xi, \eta) g(\xi - \eta) h(\eta) d\eta$$

是 $L^2(R^n)\times L^2(R^n)\to L^2(R^n)$ 的映照，且

$$\left\|\int K(\xi,\eta)g(\xi-\eta)h(\eta)\mathrm{d}\eta\right\|_{L^2}\le C\|g\|_{L^2}\|h\|_{L^2}. \tag{3.1.5}$$

**证明**　设(3.1.4)的第二式成立，则由 Schwartz 不等式

$$\begin{aligned}&\left|\int K(\xi,\eta)g(\xi-\eta)h(\eta)\mathrm{d}\eta\right|^2\\&\le\int|K(\xi,\eta)h(\eta)|^2\mathrm{d}\eta\int|g(\xi-\eta)|^2\mathrm{d}\eta\\&\le\|g\|_{L^2}^2\int|K(\xi,\eta)h(\eta)|^2\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

所以由 Fubini 定理知

$$\begin{aligned}&\left\|\int K(\xi,\eta)g(\xi-\eta)h(\eta)\mathrm{d}\eta\right\|_{L^2}^2\\&\le\|g\|_{L^2}^2\int\left(\int|K(\xi,\eta)h(\eta)|^2\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta\\&\le\|g\|_{L^2}^2\left(\sup_\eta\int|K(\xi,\eta)|^2\mathrm{d}\xi\right)\|h\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

故得(3.1.5)式. 同理，在(3.1.4)的第一式成立时也有(3.1.5)式. □

**引理 3.1.4**　若 $u_i\in H^{r_i}(R^n)$, $r_i\le\dfrac{n}{2}$ $(i=1,2)$, $r_1+r_2\ge 0$，则 $u_1u_2\in H^{(r_1+r_2-n/2)^-}$，其中 $H^{r-}=\bigcap\limits_{\varepsilon>0}H^{r-\varepsilon}$.

**证明**　根据引理的要求，需证明 $\langle\xi\rangle^{r_1+r_2-n/2-\varepsilon}\ \widehat{u_1u_2}\ (\xi)\in L^2$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立，其中 $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$. 为此令

$$G(\xi,\eta)=\frac{\langle\xi\rangle^{r_1+r_2-n/2-\varepsilon}}{\langle\xi-\eta\rangle^{r_1}\langle\eta\rangle^{r_2}},$$

则有

$$\langle\xi\rangle^{r_1+r_2-n/2-\varepsilon}\ \widehat{u_1u_2}\ (\xi)=\int G(\xi,\eta)f(\xi-\eta)g(\eta)\mathrm{d}\eta\,, \tag{3.1.6}$$

其中 $f\in L^2$, $g\in L^2$. 于是由引理3.1.3知,只需证明 $G(\xi,\eta)$ 满足(3.1.3)式. 为此,可以分别在以下几种情形下作估计:

1) 若 $|\xi-\eta|\le\frac{1}{2}|\xi|$,则

$$|G(\xi,\eta)|\le\frac{C}{\langle\xi\rangle^{n/2+\varepsilon-r_1}\langle\xi-\eta\rangle^{r_1}}\le\frac{C}{\langle\xi-\eta\rangle^{n/2+\varepsilon}}.$$

2) 若 $|\xi-\eta|\ge\frac{1}{2}|\xi|$,且 $|\eta|\le\frac{1}{2}|\xi|$,则 $|\xi-\eta|\le\frac{3}{2}|\xi|$,从而

$$|G(\xi,\eta)|\le\frac{C}{\langle\xi\rangle^{n/2+\varepsilon-r_2}\langle\eta\rangle^{r_2}}\le\frac{C}{\langle\eta\rangle^{n/2+\varepsilon}}.$$

3) 若 $|\xi-\eta|\ge\frac{1}{2}|\xi|$,且 $|\eta|\ge\frac{1}{2}|\xi|$,则直接可得

$$|G(\xi,\eta)|\le\frac{C}{\langle\xi\rangle^{n/2+\varepsilon}}.$$

这就证明了引理. □

**引理 3.1.5** 设 $K$、$K_1$、$K_2$ 均为 $R^n$ 中的锥, $u_i\in H^{s_i}(R^n)$, $\Pi_\xi WF(u_i)\subset K_i$ 对 $i=1,2$ 成立,则有如下结论:

(1) 若 $K\Subset K_2^c$,且 $l\ge0$, $s_1-l\ge0$, $s_2+l>\frac{n}{2}$,则 $\chi_K(D)(u_1u_2)\in H^{s_1-l}(R^n)$.

(2) 若 $K\Subset K_1^c\cap K_2^c$,且 $s_1+s_2>\frac{n}{2}$,则 $\chi_K(D)(u_1u_2)\in H^{s_1+s_2-n/2}(R^n)$. 以上 $K_i^c$ 表示锥 $K_i$ 的余集, $\chi_K$ 为 $K$ 的特征函数.

**证明** 由于 $\hat{u}_i$ 在 $K_i$ 外是速降的,故在证明本命题时,不妨认为 $\hat{u}_i$ 的支集就在 $K_i$ 中. 为证明(1),只需证明

$$\langle\xi\rangle^{s_1-k}\chi_K(\xi)\widehat{u_1u_2}(\xi)\in L^2. \tag{3.1.7}$$

根据引理的条件可以将(3.1.7)中的表达式写成

$$\int G(\xi,\eta)f(\xi-\eta)g(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

其中 $f(\xi-\eta)=u_1(\xi-\eta)\langle\xi-\eta\rangle^{s_1}$, $g(\eta)=u_2(\eta)\langle\eta\rangle^{s_2}$, $G(\xi,\eta)$满足

$$|G(\xi,\eta)|\leq\frac{\langle\xi\rangle^{s_1-k}\chi_K(\xi)\chi_{K_1}(\xi-\eta)\chi_{K_2}(\eta)}{\langle\xi-\eta\rangle^{s_1}\langle\eta\rangle^{s_2}}.$$

现若 $K\Subset K_2^c$,则存在 $\varepsilon>0$,使在 $G$ 的支集上

$$\langle\xi-\eta\rangle\geq\varepsilon(\langle\xi\rangle+\langle\eta\rangle)>\varepsilon\langle\xi\rangle,$$

故

$$|G|\leq\frac{C}{\langle\xi-\eta\rangle^k\langle\eta\rangle^{s_2}},$$

从而在 $s_2+l>\dfrac{n}{2}$ 时,

$$\langle\xi\rangle^{s_1-l}\chi_K(\xi)\widehat{u_1u_2}(\xi)\in L^2(R^n).$$

这就是结论(1).

为证明(2),利用 $R^{2n}$到 $R^n$ 的迹定理,可知

$$\|\chi_K(D_x)(u_1u_2)(x)\|_{H^{s_1+s_2-n/2}(R^n)}$$
$$=\|[\chi_K(D_x+D_y)u_1(x)u_2(y)]_{y=x}\|_{H^{s_1+s_2-n/2}(R^n)}$$
$$\leq\|\chi_K(D_x+D_y)u_1(x)u_2(y)\|_{H^{s_1+s_2}(R^{2n})}.$$

而右端等于

$$\|\langle\xi,\eta\rangle^{s_1+s_2}\chi_K(\xi+\eta)\chi_{K_1}(\xi)\hat{u}_1(\xi)\chi_{K_2}(\eta)\hat{u}_2(\eta)\|_{L^2(R^{2n})}.$$

若 $K\Subset K_1^c\cap K_2^c$,则在 $\chi_K(\xi+\eta)\chi_{K_1}(\xi)\chi_{K_2}(\eta)$ 的支集中有以下不等式成立:

$$\langle\xi\rangle\geq\varepsilon(\langle\xi+\eta\rangle+\langle\eta\rangle),\ \langle\eta\rangle\geq\varepsilon(\langle\xi+\eta\rangle+\langle\xi\rangle).$$

因而$\langle\xi\rangle\sim\langle\eta\rangle$,它导致

$$\chi_K(\xi+\eta)\langle\xi,\eta\rangle^{s_1+s_2}\chi_{K_1}(\xi)\chi_{K_2}(\eta)\leq C\langle\xi\rangle^{s_1}\langle\eta\rangle^{s_2}.$$

故由此可得

$$\| \chi_K(D_x)u_1u_2(x) \|_{H^{s_1+s_2-n/2}(R^n)}$$

$$\leq C \| \langle\xi\rangle^{s_1} \hat{u}_1(\xi) \langle\eta\rangle^{s_2} \hat{u}_2(\eta) \|_{L^2(R^{2n})}$$

$$= C \| u_1 \|_{H^{s_1}(R^n)} \| u_2 \|_{H^{s_2}(R^n)}.$$

这就是结论(2).□

**引理 3.1.1 的证明** 首先由 Schauder 引理知,当 $s > \frac{n}{2}$ 时,空间 $H^{n/2}$在非线性复合下不变,于是引理 3.1.1 对 $r = s$ 的情形成立. 当 $r > s$ 时,取 $\delta$、$\rho$ 满足 $\delta = \min\left(s - \frac{n}{2}, 1\right)$, $s \leq \rho - \delta$, $\rho \leq r$. 如果能从引理的结论对 $r = \rho - \delta$ 成立而推知它对 $r = \rho$ 成立,就可以用穿梭法证明引理 3.1.1. 因此,在下面的讨论中,假设引理 3.1.1 已对 $r = \rho - \delta$ 成立. 现对函数 $f(x, u)$取微分,有

$$D(f(x, u)) = g(x, u) + f'(x, u)Du. \qquad (3.1.8)$$

等式右端第一项 $g(x, u) \in H^s \cap H^{\rho-\delta}(x_0, \xi_0)$, 第二项为 $vDu$ 的形式,其中 $v \in H^s \cap H^{\rho-\delta}(x_0, \xi_0)$, 而 $Du \in H^{s-1} \cap H^{\rho-1}(x_0, \xi_0)$. 利用 $R^n_\xi$ 空间中的单位分解知,为证明 $vDu \in H^{\rho-1}_{(x_0, \xi_0)}$ 只需证明对充分小的锥体 $K_1$、$K_2$ 均有

$$\chi_K(D)(\chi_{K_1}(D)v \cdot \chi_{K_2}(D)Du) \in H^{\rho-1}(R^n). \qquad (3.1.9)$$

以下分几种情况进行讨论:若 $K_1$ 与 $K_2$ 都在 $\xi_0$ 的附近,则因为 $\delta \leq 1$,故 $\chi_{K_1}(D)v \in H^{\rho-1}$, $\chi_{K_2}(D)Du \in H^{\rho-1}$, 从而(3.1.9)可以由 Schauder 引理推出. 若 $K_1$ 在 $\xi_0$ 附近,而 $K_2$ 与 $K$ 相分离,则(3.1.9)可由 $l = 1 - \delta$ 时引理 3.1.5 的结论 1 推出,因为这时 $(s-1) + (1-\varepsilon) > \frac{n}{2}$. 同样地,若 $K_2$ 在 $\xi_0$ 附近,而 $K_1$ 与 $K$ 相分离,则(3.1.9)可由 $l = 0$ 时引理 3.1.5 的结论 1 推出. 最后,若 $K_1$ 和 $K_2$ 均与 $K$ 相分离,则由引理 3.1.5 的结论 2 可知

$$\chi_K(D)(\chi_{K_1}(D)v \cdot \chi_{K_1}(D)Du) \in H^{s+(s-1)-n/2}(R^n) \subset H^{\rho-1}(R^n),$$

因为这时 $\rho \leq r \leq 2s - \frac{n}{2}$. 综合以上的讨论并应用于(3.1.8),可得知 $D(f(x, u)) \in H^{\rho-1}(x_0, \xi_0)$,故 $f(x, u) \in H^{\rho}(x_0, \xi_0)$. 只要 $\rho < r$, 上述推理过程可继续进行. 最后可得引理的结论. □

定理 3.1.1 的叙述与第 2 章的定理 2.2.2 很接近. 但需注意它们之间的重要区别:第一,在定理 3.1.1 中要求解至少是 $H^s\left(s > \frac{n}{2}\right)$ 正则的. 即要求所讨论的解的奇性不能太强;第二,对于解在所考虑的次特征带上的正则性指数不能超过 $2s - \frac{n}{2}$,即沿着次特征带传播的奇性也不能太弱. 上述两个条件当然还可减弱,但在一般的非线性方程的奇性传播定理中都有这两类条件. 由于在定理 3.1.1 中有 $r \leq 2s - \frac{n}{2}$ 的条件,故该定理也称为 2s 型的奇性传播定理.

对于更一般的半线性方程

$$\Box u = f(u, Du), \tag{3.1.10}$$

直接应用前面证明定理 3.1.1 的穿梭法得不到所需的结论. 因为(3.1.10)式右端的函数 $f$ 的可微性要比 $u$ 低一阶,而通过波动方程的求解又只能使解比右端函数的可微性增加一阶. 但可以通过对方程求导数的方法,导出一个具有同样主部的以 $U = (u, D_{x_1}u, \cdots, D_{x_n}u)$ 为未知函数的二阶方程组. 再用类似的方法得到 $U$ 的奇性传播规律. 最后回到关于函数 $u$ 的结论. 相应的有如下定理:

**定理 3.1.2** 设 $u$ 为(3.1.9)的 $H^s$ 解, $s > \frac{n}{2} + 1$, $\gamma$ 是过 $(x_0, \xi_0)$ 的一条次特征带,则当 $s \leq r \leq 2s - \frac{n}{2} - 1$ 时,可由 $u \in H^r(x_0, \xi_0)$ 而推知 $u \in H^r(\gamma)$.

定理 3.1.1 与 3.1.2 可以推广到一般半线性高阶严格双曲型方程的情形.

**定理 3.1.3** 设 $P = p(x, D_x)$ 是 $m$ 阶严格双曲型偏微分算

子，即它的主象征 $p_m(x, \xi)$ 作为 $\xi_n$ 的多项式有 $m$ 个两两相异的实根. $u \in H^s$ 为方程

$$p(x, D_x)u = f(x, u, \ldots, D^{m-1}u) \qquad (3.1.11)$$

的解，其中 $s > m + \frac{n}{2} - 1$，$f$ 为其变元的 $C^\infty$ 函数. 若 $\gamma$ 是过 $(x_0, \xi_0)$ 的一条次特征带，则当 $s \leq r \leq 2s - \frac{n}{2} - m + 1$ 时，可由 $u \in H^r(x_0, \xi_0)$ 推知 $u \in H^r(\gamma)$.

利用定理 3.1.3 可以得到双曲型方程解的一个整体正则性定理，以下来叙述之：在区域 $\Omega \subset R^n$ 中考察双曲型方程，记 $\Omega_\pm = \Omega \cap \{\pm x_n > 0\}$，并设 $\Omega_+$ 总包含在 $\Omega_-$ 的决定区域内，即从 $\Omega_+$ 中任意点引出的所有往 $x_n$ 减少方向延伸的次特征线在离开 $\Omega$ 前必进入 $\Omega_-$ 中. 据此，有如下定理：

**定理 3.1.4** 设 $p(x, D_x)$ 是定义在 $\Omega$ 中的 $m$ 阶偏微分算子，关于 $x_n$ 为严格双曲型，$u \in H^s\left(s > \frac{n}{2} + m - 1\right)$ 为方程

$$p(x, D_x)u = f(x, u, \cdots, D^{m-1}u) \qquad (3.1.12)$$

的解. 则由 $u \in H^r(\Omega_-)$，$r > s$ 可推知 $u \in H^r(\Omega_+)$.

**证明** 任取 $x_0 \in \Omega_+$，并对一切 $\xi \in T^*_{x_0}(\Omega)$ 考察 $(x_0, \xi)$. 若 $(x_0, \xi)$ 为 $p(x, D_x)$ 的椭圆点，则由 $f \in H^s$ 可知，$u \in H^{s+m}(x_0, \xi)$. 又若 $(x_0, \xi)$ 为 $p(x, D_x)$ 的特征点，则过 $(x_0, \xi)$ 点作算子的次特征带 $\gamma$，它在底空间上的投影往 $x_n$ 的减少方向延伸到 $\Omega_-$ 中. 记 $r_1 = \min(r, s+1)$，则 $u \in H^{r_1}(\Omega_-)$. 由于

$$r_1 - m + 1 > s - m + 1 > \frac{n}{2},$$

故作为非线性复合 $f(u) \in H^{r_1-m+1}$. 根据定理 3.1.3 知 $u \in H^{r_1}(\gamma)$，故当然有 $u \in H^{r_1}(x_0, \xi)$. 这样，就证明了 $u$ 在 $T^*_{x_0}(\Omega)$ 的一切方向上都是微局部 $H^{r_1}$ 正则的，所以由波前集的性质知 $u \in H^{r_1}(x_0)$. 又注意到 $x_0$ 为 $\Omega_+$ 中的任意点，故 $u \in H^{r_1}(\Omega_+)$. 如果

$r_1 < r$，则取 $r_2 = \min(r, r_1 + 1)$，并按此方式继续论证之，最终可得 $u \in H^r(\Omega_+)$. □

**注**　定理 3.1.4 的结论也可适用于主象征为对角阵的双曲型方程组：

$$\begin{pmatrix} P & & \\ & \ddots & \\ & & P \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}, \qquad (3.1.13)$$

式中 $F_i = F_i(x, u, \cdots, D^\beta u_j)$ 是变元 $x$, $p_{\beta_j}(|\beta| \leq m - 1, 1 \leq j \leq n)$ 的 $C^\infty$ 函数. 其证明方法与定理 3.1.4 基本上相同，此处从略.

## § 3.2　3s 弱奇性传播定理

从前面的讨论可见，引理 3.1.1 在非线性波动方程解的 2s 奇性传播定理的证明中起了关键的作用. 在讨论二阶严格双曲型算子的奇性分析时，利用二阶严格双曲型算于特征锥面的凸性，可引入与该二阶算子相关的微局部空间，可以改进引理 3.1.1 的结论，从面能相应地证明更优的奇性传播定理. 本节中将以波动算子为例，证明如下的 3s 型的奇性传播定理.

**定理 3.2.1**　设 $u$ 为二阶严格双曲型偏微分方程

$$\Box u = f(x, u) \qquad (3.2.1)$$

的 $H^s$ 解，$s > \frac{n}{2}$，$\gamma$ 是过 $(x_0, \xi_0)$ 的一条次特征带，则当 $s \leq r \leq 3s - n + 1$ 时，可由 $u \in H^r(x_0, \xi_0)$ 推知 $u \in H^r(\gamma)$.

这个定理也称为 3s 型的奇性传播定理. 为证明它，需要引入新的函数空间来表示方程(3.2.1)的解所特有的正则性，并建立一系列的引理来为证明该定理作准备. 以下所介绍的处理方法的关键点是：当 $H^s \cap H^r(x_0, \xi_0)$ 中的函数 $u$ 又是某个波动方程的解时，$u$ 将具有一定的附加正则性. 利用这种与波动算子相关联的

正则性,可以把定理 3.1.1 中对 $r$ 的限制放宽.

**定义 3.2.1** 若函数 $u$ 满足:当 $0 \leq j < s - \frac{n}{2}$ 时,$\Box^j u \in H^{s-j}$;当 $s - \frac{n}{2} \leq k < s - \frac{n}{2} + 1$ 时,$\Box^k u \in H^{(2s-\frac{n}{2}-2k)-}$,则称 $u \in \widetilde{H}^s(\Box)$.

利用求导数的链式法则、Leibniz 公式以及关于 Sobolev 空间的 Schauder 引理,可以证明$\widetilde{H}^s(\Box)$关于非线性复合为闭的.

**引理 3.2.1** 若 $u \in \widetilde{H}^s(\Box)$, $s > \frac{n}{2}$, 且 $f(x, u)$为其变元的 $C^\infty$函数,则 $f(x, u) \in \widetilde{H}^s(\Box)$.

**证明** 利用求导数运算的 Leibniz 法则可得

$$\Box^j f(x, u) = \tilde{f}(x, u, \cdots, \Box^{\alpha_i} D^{\alpha'_i} u, \cdots),$$
$$\alpha_i + |\alpha'_i| \leq j. \tag{3.2.2}$$

若 $j < s - \frac{n}{2}$,则 $\Box^{\alpha_i} D^{\alpha'_i} u \in H^{s-j}$, 从而由 Schauder 引理知 $u \in \widetilde{H}^s(\Box)$.

若 $s - \frac{n}{2} \leq k < s - \frac{n}{2} + 1$,

$$\begin{aligned}\Box^k f(x, u) &= \Box \tilde{f}(x, u, \cdots, \Box^{\alpha_i} D^{\alpha'_i} u, \cdots) \\ &= \sum_i \tilde{f}_i \cdot \Box^{\alpha_i+1} D^{\alpha'_i} u \\ &\quad + \sum_{i,j,l} \tilde{f}_{ij} \cdot \Box^{\alpha_i} D^{\alpha'_i} D_l u \cdot \Box^{\alpha_j} D^{\alpha'_j} D_l u.\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

由 $\tilde{f}_i \in H^{s-k+1}$, $\Box^{\alpha_i+1} D^{\alpha'_i} u \in H^{(2s-n/2-2k)-}$, 故上式右端第一项属于 $H^{(2s-n/2-2k)-}$,而第二项为 $H^{s-k+1} \cdot H^{s-k} \cdot H^{s-k}$的形式,它含于 $H^{s-k} \cdot H^{s-k}$中. 由于 $2s - 2k > n - 2 \geq 0$, 故由引理3.1.2知, (3.2.3)的右端第二项含于 $H^{(2s-n/2-2k)-}$中.$\Box$

以$\tilde{H}^s(\Box)$空间所描述的正则性为基础，在非线性复合下，保持不变的$H^g(x_0,\xi_0)$微局部正则性在$0<g<3s-n$时都是对的．这有如下引理：

**引理 3.2.2** 若$\frac{n}{2}<s\leq g<3s-n$，$u\in\tilde{H}^s(\Box)\cap H^g(x_0,\xi_0)$，且$f(x,u)$为其变元的$C^\infty$函数，则$f(x,u)\in\tilde{H}^s(\Box)\cap H^g(x_0,\xi_0)$．

引理 3.2.2 将在定理 3.2.1 的证明中起着关键的作用，为说明这一点，我们将引理 3.2.2 的证明放到后面，先指出如何从这个引理推出定理 3.2.1．

**定理 3.2.1 的证明** 有了引理 3.2.2 为基础，定理 3.2.1 可以用穿梭法很快证得．首先指出$u\in\tilde{H}^s(\Box)$，这是因为，当$j<s-\frac{n}{2}$时，

$$(\Box)^j u=\tilde{f}(x,u,\cdots,D^j u),\qquad(3.2.4)$$

故在此时由 Schauder 引理知$\tilde{f}(x,u,\cdots,D^j u)\in H^{s-j}$，所以$(\Box)^j u\in H^{s-j}$．对(3.2.4)再求一次导数，可得：当$k$满足$s-\frac{n}{2}\leq k<s-\frac{n}{2}+1$时，

$$\begin{aligned}(\Box)^k u=&h(x,u,\cdots,D^{k-1}u)\\&+\sum_{|\alpha|=k}h_\alpha(x,u,\cdots,D^{k-1}u)D^\alpha u\\&+\sum_{|\alpha|=k,\ |\beta|=k}h_{\alpha\beta}(x,u,\cdots,D^{k-1}u)D^\alpha uD^\beta u.\end{aligned}\qquad(3.2.5)$$

利用 Schauder 引理知，当$|\rho|\leq r$，$r>\frac{n}{2}$时，$H^r\cdot H^\rho\subset H^\rho$，因此，由$2s-\frac{n}{2}-2k\leq s-k\leq\frac{n}{2}<s-(k-1)$可得(3.2.5)右端第二项属于$H^{\left(2s-\frac{n}{2}-2k\right)-}$．相仿地，因为$2s-2k\geq n-2\geq 0$，由

直接运算可推知(3.2.5)的右端最后一项也在此空间中.

现在设 $u \in H^{r_1}(\gamma)$，则只要 $r_1 < 3s - n$，即由引理 3.2.2 知 $f(x, u) \in H^{r_1}(\gamma)$. 利用线性波动方程的奇性传播定理知 $u \in H^{\min(g, r_1+1)}$. 反复用此法论证，可得定理的结论. □

引理 3.2.2 可从它的一个特例推出. 当 $f(x, u)$为两个函数乘积时，我们有如下引理：

**引理 3.2.3** 若 $\frac{n}{2} < s \leq g < 3s - n$，□的象征在$(x_0, \xi_0)$点为零. $u$、$v \in \tilde{H}^s(\square) \cap H^g(x_0, \xi_0)$，则当 $|\alpha| \leq 1$ 时，$vD^\alpha u \in H^{g-|\alpha|}(x_0, \xi_0)$. 特别是，在 $s$、$g$ 满足上述条件时，$\tilde{H}^s(\square) \cap H^g(x_0, \xi_0)$ 成一个代数.

若引理 3.2.3 成立，则可证明引理 3.2.2 如下：

**引理 3.2.2 的证明** 本引理的证明与引理 3.1.1 的证明相仿. 当 $g = s$ 时，引理 3.2.3 的结论由引理 3.2.1 可得. 当 $g > s$时，取 $\delta = \min(2s - n, 1)$，我们由 $f(x, u) \in H^{\rho-\delta}(x_0, \xi_0)$ 来推出 $f(x, u) \in H^\rho(x_0, \xi_0)$ 成立. 这里自然可认为 $s \leq \rho - \delta$, $\rho \leq g$. 对 $f(x, u)$作用微分算子，则有

$$D_x(f(x, u)) = h(x, u) + f'(x, u)D_x u.$$

由假设知右端第一项属于 $H^{\rho-\delta}(x_0, \xi_0) \subset H^{\rho-1}(x_0, \xi_0)$，第二项是 $vDu$ 的形式，其中 $v \in \tilde{H}^s(\square) \cap H^{\rho-\delta}(x_0, \xi_0)$，$u \in \tilde{H}^s(\square) \cap H^\rho(x_0, \xi_0)$，故采用与引理 3.1.1 的证明中同样的方法，可以由引理3.2.1证明 $f'(x, u)D_x u \in H^{\rho-1}(x_0, \xi_0)$ 在$\rho < 3s - n$时成立. 于是 $D_x(f(x, u))$也有这样的微局部正则性，这就导致 $f(x, u) \in H^\rho(x_0, \xi_0)$. □

现在留下来的工作就是证明引理 3.2.3. 它的论证比较长. 为了以下的运算方便，我们将波动算子改写为：

$$\square' = D_{x_1}D_{x_n} - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-1} D^2_{x_j x_j}. \tag{3.2.6}$$

事实上，通过一个简单的自变量变换，$\Box$即可变成(3.2.6)的形式.易见，利用 $p(\xi)=\mathrm{sym}(\Box')$ 的特殊形式：

$$\xi_n+\eta_n=\frac{p(\xi)}{\xi_1}+\frac{p(\eta)}{\eta_1}+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-1}\xi_j^2\frac{\xi_1+\eta_1}{\xi_1\eta_1}-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\xi_j^2-\eta_j^2}{\eta_1}. \tag{3.2.7}$$

从而有如下引理：

**引理 3.2.4**　设 $K$ 是除原点外不与$\{\xi_n=0\}$相交的一个锥，$\hat{u}$与$\hat{v}$的支集在$(1, 0, \cdots, 0)$与$(-1, 0, \cdots, 0)$的锥邻域中，则对任意满足 $\sigma_i+\sigma_j=\sigma>0$ 的选择，有

$$\|\chi_K(D_x)uv\|_{H^{\sigma+k-n/2}}$$

$$\leq\sum_{i+j\leq k}\|(\Box')^i u\|_{H^{\sigma_i-i}}\|(\Box')^j v\|_{H^{\sigma_j-j}}. \tag{3.2.8}$$

**证明**　仅对 $k=1$ 的情形给出证明：将 $\chi_K(D_x)D_{x_n}uv(x)$写成

$$\chi_K(D_x+D_y)(D_{x_n}+D_{y_n})\chi_+(D_x)\chi_-(D_y)u(x)v(y)|_{y=x},$$

其中 $\chi_\pm\in S^0_{1,0}(R^n)$ 的支集在$(\pm1, 0, \cdots, 0)$的锥邻域中，且分别在$\hat{u}$、$\hat{v}$的支集上等于1.如引理3.1.5的证明中所指出的，在 $\chi_K(\xi+\eta)\chi_+(\xi)\chi_-(\eta)$的支集上，$\langle\xi\rangle\sim\langle\eta\rangle$，故有$C^\infty$函数 $\chi_0$，其支集为$(0, \infty)$的紧集，使得

$$\chi_K(\xi+\eta)\chi_+(\xi)\chi_-(\eta)=\chi_K(\xi+\eta)\chi\left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\eta\rangle}\right)\chi_+(\xi)\chi_-(\eta).$$

利用(3.2.7)可得

$$\chi_K(\xi+\eta)(\xi_n+\eta_n)\chi_+(\xi)\chi_-(\eta)$$

$$=\chi_K(\xi+\eta)\left(\frac{p(\xi)}{\xi_1}+\frac{p(\eta)}{\eta_1}+\sum(\xi_j+\eta_j)b_j(\xi, \eta)\right)$$

$$\times\chi_+(\xi)\chi_-(\eta), \tag{3.2.9}$$

其中 $b_j(\xi, \eta)$是 $S^0_{1,0}(R^{2n})$类象征.此外，由于 $b_j$ 的表示式中含有

$\xi_i/\eta_1$ 与 $\eta_i/\eta_1$ ($i \neq 1$) 的项，故在 $\chi_\pm$ 的支集收缩时它为小量. 而在 $\chi_K(\xi+\eta)$ 的支集上 $(\xi_j+\eta_j)(\xi_n+\eta_n)^{-1}$ 有界. 所以将(3.2.9)中最后一项移到左端，得到：

$$\chi_K(\xi+\eta)(\xi_n+\eta_n)\chi_+(\xi)\chi_-(\eta)$$

$$\times\left(1-\sum(\xi_j+\eta_j)(\xi_n+\eta_n)^{-1}b_j(\xi,\eta)\right)$$

$$=\chi_K(\xi+\eta)\left(\frac{p(\xi)}{\xi_1}+\frac{p(\eta)}{\eta_1}\right),$$

故

$$\chi_K(\xi+\eta)(\xi_n+\eta_n)\chi_+(\xi)\chi_-(\eta)$$

$$=a_0(\xi,\eta)\left(\frac{p(\xi)}{\xi_1}+\frac{p(\eta)}{\eta_1}\right)\chi_+(\xi)\chi_-(\eta),$$

其中

$$a_0(\xi,\eta)=\frac{\chi_K(\xi+\eta)\tilde{\chi}_+(\xi)\tilde{\chi}_-(\eta)}{1-\sum(\xi_j+\eta_j)(\xi_n+\eta_n)^{-1}b_j(\xi,\eta)},$$

它是 $S^0_{1,0}(R^{2n})$ 类象征.

于是，由于 $D_{x_n}$ 在 $\mathrm{supp}\chi_K$ 上是椭圆的，有估计：

$$\|\chi_K(D)uv\|_{H^{\sigma-n/2+1}(R^n)}\leq\|\chi_K(D)D_{x_n}uv\|_{H^{\sigma-n/2}(R^n)}$$

$$\leq C(\|p(D_x)D_{x_1}^{-1}\tilde{\chi}(D_x,D_y)u(x)v(y)\|_{H^\sigma(R^{2n})}$$

$$+\|p(D_y)D_{y_1}^{-1}\tilde{\chi}(D_x,D_y)u(x)v(y)\|_{H^\sigma(R^{2n})}).$$

注意：在 $\tilde{\chi}$ 的支集上，$\langle\xi\rangle\sim\langle\eta\rangle$，故上式可被下面的量所控制：

$$C(\|p(D_x)u\|_{H^{\sigma_1-1}(R^n)}\|v\|_{H^{\sigma_2}(R^n)}$$

$$+\|u\|_{H^{\rho_1}(R^n)}\|p(D_x)v\|_{H^{\rho_2-1}(R^n)}),$$

其中 $\sigma_{1,2}$、$\rho_{1,2}$ 为满足 $\sigma_1+\sigma_2=\sigma$、$\rho_1+\rho_2=\rho$ 的任意的选择，这样，就得到了本引理在 $k=1$ 时的结论. $k>1$ 时的证明是相仿的，此处从略. □

**引理 3.2.3 的证明**　在以下的证明中可以认为 $g > s$，否则，定理的结论是平凡的．不妨设 $u$、$v$ 的支集都在 $x_0$ 附近．又利用拟微分算子的单位分解，可以设 $\hat{u}$ 与 $\hat{v}$ 的支集在充分小的锥 $K_1$ 与 $K_2$ 中．当 $K$ 为 $\xi_0$ 的锥邻域时，分下面三种情形讨论：

(1) 先考虑 $K_1$、$K_2$ 中至少有一个在 $\xi_0$ 的邻域中的情形：

若 $K_1$、$K_2$ 的支集都在 $\xi_0$ 的邻域，则 $v \in H^g$，$D^\alpha u \in H^{g-|\alpha|}$．由 Schauder 引理立刻可知 $vD^\alpha u \in H^{g-|\alpha|}$．

若 $K_1$ 在 $\xi_0$ 的邻域中，而 $K_2$ 与 $K$ 不相交，则 $v \in H^s$，$D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$．因为 $(s-|\alpha|)+|\alpha| > \frac{n}{2}$，故由引理 3.1.5 的结论(1)知 $\chi_K(D)(vD^\alpha u) \in H^{g-|\alpha|}$．

又若 $K_2$ 在 $\xi_0$ 的邻域中，而 $K_1$ 与 $K$ 不相交，则 $D^\alpha u \in H^{g-|\alpha|}$，$v \in H^s$，仍由引理 3.1.5 的结论(1)知 $\chi_K(D)(vD^\alpha u) \in H^{g-|\alpha|}$．

(2) 若 $K_1$(相应地，$K_2$)的支集与$\square'$的特征集相分离，则在 $K_1$ 中$\square'$为椭圆，面由 $(\square')^k v \in H^{2s-\frac{n}{2}-2k-\epsilon}$ 知 $v \in H^{2s-\frac{n}{2}-\epsilon}$ (相应地，$D^\alpha u \in H^{2s-\frac{n}{2}-|\alpha|-\epsilon}$)．于是由引理 3.1.5 的结论(2)知 $\chi_K(D)(vD^\alpha u) \in H^{3s-n-|\alpha|-\epsilon}$．

(3) 剩下的情形是 $K_1$、$K_2$ 分别为特征方向 $\xi_1$、$\xi_2$ 的邻域，且 $\xi_1 \neq \xi_0$，$\xi_2 \neq \xi_0$．这时：

若 $\xi_1 \neq -\xi_2$，则由定理 2.1.3 知，$\Pi_\xi WF(vD^\alpha u)$被含于 $E = \Pi_\xi WF(v) + \Pi_\xi WF(D^\alpha u)$ 之中．但是由算子$\square'$的特征锥面的凸性知，除了 $\xi_1$ 与 $\xi_2$ 的邻域之外，$E$ 不会再与算子$\square'$的特征方向相遇，故当 $K$ 在 $\xi_0$ 的充分小的锥邻域中时，$E \cap K = \chi_K(D)(vD^\alpha u) \in H^\infty$．

又当 $\xi_1 = -\xi_2$ 时，可以应用引理 3.2.4，取 $k$ 为 $\left(s-\frac{n}{2}, s-\frac{n}{2}+1\right)$ 中的整数，将$(3s-n-|\alpha|)-$写成 $\sigma+k-\frac{n}{2}$ 的形式，就有

$$\sigma = \frac{n}{2} - k + (3s - n - |\alpha|) -$$

$$\geq -\left(s - \frac{n}{2} + 1\right) + \left(3s - \frac{n}{2} - 1\right) -$$

$$= (2s - 2) - > 0.$$

从而由引理 3.2.4 得：

$$\| \chi_K(D) v D^\alpha u \|_{H^{(3s-n-|\alpha|)-}}$$

$$\leq C \sum_{i+j\leq k} \| (\Box')^i v \|_{H^{\sigma_i - i}} \| (\Box')^j D^\alpha u \|_{H^{\sigma_j - j}},$$

其中 $\sigma_i + \sigma_j \geq \sigma$. 然后选取 $\sigma_i$ 与 $\sigma_j$ 如下：

$$\sigma_i = s,\ \sigma_j = s - |\alpha|,\ 若\ i \neq k,\ j \neq k;$$

$$\sigma_i = \left(2s - \frac{n}{2} - k\right) -,\ \sigma_j = s - |\alpha|,\ 若\ i = k,\ j = 0;$$

$$\sigma_i = s,\ \sigma_j = \left(2s - \frac{n}{2} - k - |\alpha|\right) -,\ 若\ i = 0,\ j = k.$$

由于在这三种情形下 $\| (\Box')^i v \|_{H^{\sigma_i - i}}$、$\| (\Box')^j D^\alpha u \|_{H^{\sigma_j - j}}$ 均有界，故知 $g < 3s - n$ 时，$vD^\alpha u \in H^{g-|\alpha|}(x_0, \xi_0)$.

综合以上各种情形的分析，就得到了引理的结论. □

**注 1** 半线性波动方程的 $3s$ 型奇性传播定理首先是由 M. Beals 得到的（见文献[9]），定理 3.2.1 中的结论还可改进到 $r < 3s - n + 2$（见文献[88]）. 此外，在文献[9]中还对变系数二阶半线性严格双曲型方程的情形证明了定理 3.2.1 的结论.

**注 2** $3s$ 型的奇性传播定理对于一般的高阶双曲型方程并不成立. 其原因是在证明半线性波动方程 $3s$ 型奇性传播定理的过程中，要用到波动算子特征锥面的凸性（见引理 3.2.3 的证明中的情形(3)）. 而在高于二阶的双曲型方程的情形，方程的特征锥而不可能为一个凸锥，故此时上述证明方法不再有效. 在文献[42]中考察了一个四阶双曲型方程，并以此作为反例说明了上述事实.

由定理 3.1.1 到定理 3.2.1 都说明了在所考察的半线性方程

具有一定正则性的解存在的假定下，此解的不太弱的奇性的传播具有和线性方程奇性传播相同的特征. 那么，半线性方程解的更弱的奇性传播规律如何?经进一步的研究发现，对于非线性偏微分方程而言，解的弱奇性不仅可以由传播得到，而且新的奇性可以由载有奇性的特征作为新的奇性源发出. 这就是所谓奇性干扰现象，它是下节研究的对象.

## § 3.3 奇性干扰与奇性指标

上节的讨论说明了对于所考察的半线性方程，其解的不太弱的奇性传播具有和线性方程奇性传播相同的特征. 那么，半线性方程解的更弱的奇性传播规律如何?经进一步的研究发现，对于非线性偏微分方程而言，解的弱奇性不仅可以由传播得到，而且新的奇性可以由载有奇性的特征作为新的奇性源发出. 这就是所谓"奇性干扰现象"，它就是以下要研究的对象.

首先看一个例子，考虑$(t, x)$空间中的双曲型方程组：

$$\begin{cases}(\partial_t + \partial_x)u = 0; \\ (\partial_t - \partial_x)v = 0; \\ \partial_t w = uv,\end{cases} \tag{3.3.1}$$

在$t = 0$时满足初始条件：

$$u=\begin{cases}(x-1)^n, & x>1; \\ 0, & x\leq 1,\end{cases} \quad v=\begin{cases}0, & x>-1; \\ (-x-1)^n, & x\leq -1,\end{cases} \quad w=0 \tag{3.3.2}$$

的 Cauchy 问题. 它的解可以明显地写出为：

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases}(x+t-1)^n, & x+t>1; \\ 0, & x+t\leq 1,\end{cases} \\ v &= \begin{cases}0, & x-t\geq -1; \\ (-x+t-1)^n, & x-t<-1,\end{cases}\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$w=\begin{cases}0, & (t-1)^2\le x^2;\\ \int_{1+|x|}^{t}((\tau-1)^2-x^2)^n\mathrm{d}\tau, & (t-1)^2>x^2.\end{cases}$$

易见，$u$ 在 $x+t=1$ 外为 $C^\infty$，在 $L_1: x+t=1$ 上仅属于 $H^{n+\frac{1}{2}-\varepsilon}(\varepsilon>0)$；$v$ 在 $x-t=1$ 外为 $C^\infty$，在 $L_2: x-t=1$ 上仅属于 $H^{n+\frac{1}{2}-\varepsilon}$；而 $w$ 除在 $x\pm t=1$ 上有奇性外，在 $L_3: x=0, t>1$ 上也有奇性，且在 $L_3$ 上 $w$ 仅属于 $H^{2n+\frac{3}{2}-\varepsilon}$. 于是，作为问题(3.3.1)、(3.3.2)的解 $U=(u, v, w)$，在 $t<1$ 时奇性仅出现在 $L_1$ 与 $L_2$ 上，而在 $t>1$ 时，除在 $L_1$、$L_2$ 上的奇性继续存在外，在 $L_3$ 上也出现了 $2n+\dfrac{3}{2}$ 阶的奇性，这个奇性不是由 $t<1$ 时某条次特征线(在一个空间变量的情形，次特征线即特征线)上的奇性传播而来，而是由新的奇性源 $L_1\cap L_2=\{x=0, t=1\}$ 处发出的.

这个例子说明，载有奇性的次特征线相交时，交点可以成为一个新的奇性源而散发出新的奇性. 这就是非线性方程的奇性干扰现象. 由于奇性干扰的产生，非线性问题解的奇性将比相应的线性问题解的奇性更多，其分布也更复杂. 对于仅含一个空间变量的半线性严格双曲型组，J. Rauch、M. Reed 等对奇性的干扰作了详细的分析. 例如，在文献[114]中他们对一阶半线性双曲型方程组的 Cauchy 问题定义了正则性指标，从而可以由初始条件的奇性预测出解的所有奇性分布与其强度. 这样，就对由奇性干扰所产生的新奇性给出了估计. 下面对具有多个空间变量的波动方程的 Cauchy 问题讨论奇性干扰问题，同时也按适当的方式定义解的正则性指标，并以此来控制所有因奇性干扰而产生的奇性.

在区域 $x_n>0$ 中讨论 Cauchy 问题为

$$\Box u\equiv\Big(\partial^2_{x_n}-\sum_{i=1}^{n-1}\partial^2_{x_i}\Big)u=f(x, u), \tag{3.3.4}$$

$$u|_{x_n=0}=\phi_0, \ (\partial_{x_n}u)|_{x_n=0}=\phi_1. \tag{3.3.5}$$

假设在该区域内问题的 $H^s\left(s>\frac{n}{2}\right)$ 解存在，希望能根据初始资料的奇性来决定解的奇性分布及其强度. 下面仍用波前集 $WF(u)$ 或奇性函数 $s_u(x, \xi)$ 来描写解的奇性，但为刻画奇性干扰所产生的全部奇性，还得引进一些新的概念.

**定义 3.3.1** 设 $\Omega$ 为 $R^n$ 中的开集，在余切丛 $T^*(\Omega)$ 上给定一个关于 $\xi$ 为正齐零次的下半连续函数 $r(x, \xi)$，满足条件：

(1) $r(x, \xi)>\frac{n}{2}$；

(2) $r(x, \xi)\leq r(x, \xi_1)+r(x, \xi_2)-\frac{n}{2}$. 式中 $\xi_1$、$\xi_2$、$\xi$ 为球面 $S^{n-1}$ 上的三点，且 $\xi$ 位于连接 $\xi_1$ 与 $\xi_2$ 的大圆弧上，则称 $r(x, \xi)$ 为 $T^*(\Omega)$ 上的合格函数.

**引理 3.3.1** 若 $r(x, \xi)$ 为定义在 $\Omega$ 上的合格函数，定义在 $\Omega$ 上的分布 $u$、$v$ 的正则性函数满足 $s_u(x, \xi)\geq r(x, \xi)$，$s_v(x, \xi)\geq r(x, \xi)$，则乘积 $uv$ 的正则性函数满足 $s_{uv}(x, \xi)\geq r(x, \xi)$.

**证明** 由于正则性函数表示分布的微局部性质，因此可局限在固定点 $x$ 的邻域中来考察. 将 $s_u(x, \xi)$、$s_v(x, \xi)$、$r(x, \xi)$ 简记为 $s_u(\xi)$、$s_v(\xi)$、$r(\xi)$. 由正则性函数的性质知，对固定的 $(\bar{x}, \bar{\xi})$ 与任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\bar{x}$ 的邻域 $w$ 与 $\bar{\xi}$ 的锥邻域 $V$，使得对任意的 $\phi\in C_0^\infty(w)$ 有

$$\widehat{\phi u}(\xi)\langle\xi\rangle^{r(\bar{\xi})-\varepsilon}\in L^2(V), \tag{3.3.6}$$

其中 $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$. 对 $v$ 也有同样的估计. 以下为简单起见，设 $u$、$v$ 的支集已含在 $w$ 中，从而在以下的运算中省略函数乘子 $\phi$.

由 Fourier 变换的性质知

$$\widehat{uv}(\xi)=\int\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{3.3.7}$$

今考察 $\widehat{uv}$ 在 $R_\xi^n$ 中的衰减性：给定 $\xi_0\in R_\xi^n$，要证明对任意 $\varepsilon>0$，在 $\xi_0$ 的锥邻域 $\Gamma_{\xi_0}$ 中

$$\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\epsilon}\ \widehat{uv}\ (\xi)\in L^2. \qquad (3.3.8)$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $r(\xi)>\frac{n}{2}+\epsilon$ 对一切 $\xi$ 成立. 又由于 $r(\xi)$ 为下半连续，故对此处给定的 $\epsilon>0$，可作 $\xi_0$ 的锥邻域 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$，使 $\Gamma_1+\Gamma_1\subset\Gamma_2$，且在 $\Gamma_2$ 中有下式成立：

$$r(\xi)>r(\xi_0)-\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.3.9)$$

现考察以下的积分

$$\begin{aligned}
&|\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\epsilon}\chi_{\Gamma_1}(\xi)\ \widehat{uv}\ (\xi)|\\
&\leq\int|\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{\Gamma_2}(\eta)\chi_{\Gamma_2}(\xi-\eta)\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\epsilon}\hat{u}\ (\xi-\eta)\hat{v}\ (\eta)|\mathrm{d}\eta\\
&\quad+\int|\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{\Gamma_2}(\eta)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\xi-\eta)\\
&\quad\times\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\epsilon}\hat{u}\ (\xi-\eta)\hat{v}\ (\eta)|\mathrm{d}\eta\\
&\quad+\int|\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\eta)\chi_{\Gamma_2}(\xi-\eta)\\
&\quad\times\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\epsilon}\hat{u}\ (\xi-\eta)\hat{v}\ (\eta)|\mathrm{d}\eta\\
&\quad+\int|\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\eta)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\xi-\eta)\\
&\quad\times\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\epsilon}\hat{u}\ (\xi-\eta)\hat{v}\ (\eta)|\mathrm{d}\eta\\
&=I_1+I_2+I_3+I_4,
\end{aligned}$$

式中 $\chi_{\Gamma_1}$、$\chi_{\Gamma_2}$ 为相应锥集的特征函数. 以下利用引理 3.1.3 来证明 $I_k$ 都是 $L^2$ 可积的. 今取

$$\begin{aligned}
K_1(\xi,\eta)&=\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{\Gamma_2}(\eta)\chi_{\Gamma_2}(\xi-\eta)\\
&\qquad\times\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\epsilon}\langle\xi-\eta\rangle^{-r(\xi_0)+\frac{\epsilon}{2}}\langle\eta\rangle^{-r(\xi_0)+\frac{\epsilon}{2}},\\
K_2(\xi,\eta)&=\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{\Gamma_2}(\eta)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\xi-\eta)
\end{aligned}$$

$$\times \langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}\langle\xi-\eta\rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}\langle\eta\rangle^{-r(\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$K_3(\xi,\eta)=\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\eta)\chi_{\Gamma_2}(\xi-\eta)$$

$$\times \langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}\langle\xi-\eta\rangle^{-r(\xi_0)+\frac{\varepsilon}{2}}\langle\eta\rangle^{-\frac{n}{2}-\varepsilon}.$$

$$K_4(\xi,\eta)=\chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\eta)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\xi-\eta)$$

$$\times \langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}\langle\eta\rangle^{-r_1+\varepsilon/6}\langle\xi-\eta\rangle^{-r_2+\varepsilon/6}.$$

对于 $K_1$，由

$$\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}\le\langle\xi-\eta\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}+\langle\eta\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}$$

以及 $r(\xi_0)>\frac{n}{2}$ 知，$K_1$ 满足引理 3.1.3 的条件，故 $I_1$ 为平方可积.

对于 $K_2$，由于在其支集中

$$|\eta|=|(\xi-\eta)-\xi|\ge c(|\xi-\eta|+|\xi|)\ge c|\xi|,$$

所以

$$|K_2(\xi,\eta)|\le C\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}\langle\xi-\eta\rangle^{-n/2-\varepsilon}\langle\xi\rangle^{-r(\xi_0)+\varepsilon/2}$$

$$\le C\langle\xi-\eta\rangle^{-n/2-\varepsilon},$$

故 $K_2$ 也满足该引理的条件. 对于 $K_3$ 也可作同样的讨论. 所以 $I_2$、$I_3$ 均平方可积. 最后考察 $I_4$，记 $\zeta=\xi-\eta$，视 $\eta$、$\zeta$ 为动点，它们在 $S^{n-1}\setminus\Gamma$ 上变动. 当 $(\bar\xi,\bar\eta)$ 落在 $K_4$ 的支集内时有 $\bar\zeta+\bar\eta=\bar\xi\in\Gamma_1$，所以由合格函数的性质知

$$r(\bar\eta)+r(\bar\zeta)\ge r(\bar\xi)+\frac{n}{2}. \tag{3.3.10}$$

此外，我们能找到 $(\bar\eta,\bar\zeta)$ 的小锥邻域 $C'_{\bar\eta}$、$C''_{\bar\zeta}$，使

$$\hat{v}(\eta)\langle\eta\rangle^{r(\bar\eta)-\varepsilon/6}\in L^2(C'_{\bar\eta}),$$

$$\hat{u}(\zeta)\langle\zeta\rangle^{r(\bar\zeta)-\varepsilon/6}\in L^2(C''_{\bar\zeta}). \tag{3.3.11}$$

这种锥邻域组 $\{C'_{\bar\eta}\times C''_{\bar\zeta}\}$ 的全体构成对 $(S^{n-1}\setminus\Gamma_2)\times(S^{n-1}\setminus\Gamma_2)$ 的一个开覆盖，从而可取出一个有限开覆盖 $\{C'_i\times C''_j\}$，并作出依

存于这个开覆盖的单位分解 $1 = \phi_{ij}$. 这样,就只需考察各个与核 $\phi_{ij}K_4$ 相对应的积分 $I_4^{ij}$.

基于 $\phi_{ij}$ 的支集的特性,事实上只需考察函数

$$K_4^{ij}(\xi, \eta) = \chi_{\Gamma_1}(\xi)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\eta)\chi_{S^{n-1}\setminus\Gamma_2}(\xi-\eta)$$
$$\times\chi_{C_i'}(\eta)\chi_{C_j''}(\zeta)\langle\xi\rangle^{r(\xi_0)-\varepsilon}\langle\eta\rangle^{-r(\eta_i)+\varepsilon/6}\langle\xi-\eta\rangle^{-r(\zeta_j)+\varepsilon/6}$$

是否满足定理 3.1.3 的条件,其中 $\eta_i$、$\zeta_j$ 为与 $C_i'$、$C_j''$ 相对应的 $\bar{\eta}$、$\bar{\zeta}$. 由(3.3.9)、(3.3.10)知

$$r(\eta_i) - \frac{\varepsilon}{6} + r(\zeta_j) - \frac{\varepsilon}{6} \geq r(\bar{\xi}) + \frac{n}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$$
$$> r(\xi_0) - \varepsilon + \frac{n}{2} + \frac{\varepsilon}{6}. \quad (3.3.12)$$

又注意到在 $K_4^{ij}$ 的支集上

$$|\xi-\eta| \geq c(|\xi| + |\eta|) \geq c|\xi|,$$
$$|\eta| \geq c(|\xi-\eta| + |\xi|) \geq c|\xi|,$$

故利用(3.3.11)与(3.3.12)以及引理 3.3.1 可知 $I_4^{ij}$ 平方可积,从而 $I_4 = \sum I_4^{ij}$ 也平方可积. 这样就证得了(3.3.8). 所以

$$s_{uv}(\xi_0) \geq r(\xi_0) - \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$ 可任意小,从而 $s_{uv}(\xi_0) \geq r(\xi_0)$. 又由于 $\xi_0$ 为 $R_\xi^n$ 中的任意点,从而得所需结果. □

**定义 3.3.2** 若 $g(x, \xi)$为在 $T^*(\Gamma)$上给定的齐零次下半连续函数,满足 $g(x, \xi) > \frac{n}{2}$,称所有不超过 $g(x, \xi)$的合格函数的上确界为 $g$ 的**溶合函数**,记作 $A[g]$, 即

$$A[g] = \sup\{r(x, \xi);\ r \leq g,\ r \text{ 合格}\}. \quad (3.3.13)$$

**引理 3.3.2** 若 $g(x, \xi)$为在 $T^*(\Omega)$上给定的齐零次下半连续函数,满足 $g(x, \xi) > \frac{n}{2}$, 又若分布 $u$、$v$ 满足

$$s_u(x, \xi) \geq g(x, \xi),\ s_v(x, \xi) \geq g(x, \xi), \tag{3.3.14}$$

则

$$s_{uv}(x, \xi) \geq A[g](x, \xi). \tag{3.3.15}$$

**证明**　先证明 $A[g]$是合格函数. 首先,由于下半连续函数的上确界也是下半连续的,故 $A[g]$为下半连续. $A[g] > \frac{n}{2}$ 是显然的. 又若 $\xi$、$\xi_1$、$\xi_2$ 为 $S^{n-1}$上的三点,$\xi \in \widehat{\xi_1\xi_2}$,则由 $A[g]$的定义知,对任一 $x$,以及 $\delta > 0$,有合格函数 $r^* \leq g$,使 $A[g](x, \xi) < r^*(x, \xi) + \delta$,所以

$$\begin{aligned} A[g](x, \xi) &< r^*(x, \xi_1) + r^*(x, \xi_2) + \delta - \frac{n}{2} \\ &\leq A[g](x, \xi_1) + A[g](x, \xi_2) + \delta - \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

由 $\delta$ 的任意性可得

$$A[g](x, \xi) \leq A[g](x, \xi_1) + A[g](x, \xi_2) - \frac{n}{2},$$

从而知 $A[g]$为合格函数. 又(3.3.14)即表明

$$s_u(x, \xi) \geq A[g](x, \xi),\ s_v(x, \xi) \geq A[g](x, \xi)$$

成立,故由引理 3.3.1 知引理 3.3.2 成立. □

**注**　当 $f(x, u)$为 $u$ 的具 $C^\infty$系数的多项式时,也有

$$s_f \geq A[g](x, \xi). \tag{3.3.16}$$

**引理 3.3.3**　设 $g(x, \xi)$满足引理 3.3.2 的条件,$k > \frac{n}{2}$,则

$$A[\min(g, k)] = \min(A[g], k). \tag{3.3.17}$$

**证明**　由于 $\min(g, k) \leq g$,故 $A[\min(g, k)] \leq A[g]$,同理 $A[\min(g, k)] \leq k$, 因此 $A[\min(g, k)] \leq \min(A[g], k)$.

以下我们指出，若 $\sigma(x,\xi)$ 为合格函数，则 $\min(\sigma,k)$ 也是合格的. 事实上，$\min(\sigma,k)>\frac{n}{2}$ 是显然的. 又设 $\xi\in\widehat{\xi_1\xi_2}$，则当 $\sigma(x,\xi_1)>k$ 时，我们有

$$\min(\sigma(x,\xi),k)\leq k=\min(\sigma(x,\xi_1),k)$$

$$<\min(\sigma(x,\xi_1),k)+\min(\sigma(x,\xi_2),k)-\frac{n}{2}.$$

当 $\sigma(x,\xi_2)>k$ 时，可作同样处理. 而当 $\sigma(x,\xi_1)\leq k$，$\sigma(x,\xi_2)\leq k$ 时，

$$\min(\sigma(x,\xi),k)\leq\sigma(x,\xi)\leq\sigma(x,\xi_1)+\sigma(x,\xi_2)-\frac{n}{2}$$

$$\leq\min(\sigma(x,\xi_1),k)+\min(\sigma(x,\xi_2),k)-\frac{n}{2}.$$

又 $\min(\sigma(x,\xi),k)$ 为下半连续，所以它是合格函数.

任取一个不超过 $g$ 的合格函数 $\sigma$，由于 $A[g]$ 为这类函数的上确界，故

$$\sigma(x,\xi)\leq A[g](x,\xi)\leq g(x,\xi),$$

$$\min(\sigma(x,\xi),k)\leq\min(g(x,\xi),k).$$

由于 $\min(\sigma,k)$ 为合格函数，所以 $\min(\sigma,k)\leq A[\min(g,k)]$. 注意 $A[g]$ 是所有不超过 $g$ 的合格函数的上确界，可得

$$\min(A[g],k)\leq A[\min(g,k)],$$

故得引理的结论. □

**定义 3.3.3** 记 $v$ 为线性波动方程取初始条件(3.3.5)的解，取 $r^{(k)}(x,\xi)(k\geq0)$ 满足

$$r^{(0)}(x,\xi)=s_v(x,\xi),\tag{3.3.18}$$

而当 $k>0$ 时，

$$r^{(k)}(x,\xi)=\min(s_v(x,\xi),\inf_{(y,\eta)\in\Gamma^-(x,\xi)}A[r^{(k-1)}](y,\eta)+1),\tag{3.3.19}$$

式中$\Gamma^-(x,\xi)$表示由$(x,\xi)$出发往$x_n$减少方向延伸的次特征带，我们称

$$r(x,\xi)=\lim_{k\to\infty}r^{(k)}(x,\xi)\tag{3.3.20}$$

为问题(3.3.4)、(3.3.5)的**正则性控制函数**.

**注**　由定义容易证明$r^{(k)}(x,\xi)$是一个关于$k$的单调下降函数，且有下界，故其极限存在，从而定义3.3.3是合理的.

**定理3.3.1**　设在(3.3.4)式中$f(x,u)$为$u$的具$C^\infty$系数的多项式，初始条件$\phi_0\in H^s$，$\phi_1\in H^{s-1}\left(s>\frac{n}{2}\right)$，问题(3.3.4)与(3.3.5)的$H^s$解$u$存在，则解的正则性函数满足

$$s_u(x,\xi)\geq r(x,\xi),\tag{3.3.21}$$

式中$r(x,\xi)$为由初始条件(3.3.5)所决定的正则性控制函数.

**证明**　以$v$记齐次波动方程$\Box v=0$满足初始条件(3.3.5)的解，$E$为$\Box$的前向基本解算子，即以$Eg$表示方程$\Box u=g$的满足齐次初始条件

$$u|_{x_n=0}=(\partial_{x_n}u)|_{x_n=0}=0\tag{3.3.22}$$

在$x_n>0$中的解. 则问题(3.3.4)的解可以写成

$$u=v+Ef(x,u).\tag{3.3.23}$$

利用(3.3.23)可以写出以下的迭代式：

$$u_0=u,\ u_k=v+Ef(x,u_{k-1}),\ (若\ k>0).\tag{3.3.24}$$

显然，当$u$为问题(3.3.4)与(3.3.5)的解时，每个$u_k$都与$u$相同，从而可通过$u_k$来估计$u$的奇性. 为使记号简单起见，以下记$f_k=f(x,u_k)$. 由定义3.3.3知$s_v(x,\xi)>r^{(0)}(x,\xi)$. 今由于$u\in H^s$，故$s_{u_0}(x,\xi)\geq s>\frac{n}{2}$，所以$s_{f_0}>\frac{n}{2}$，且有$s_{Ef_0}>\frac{n}{2}+1$. 从

$u_1 = v + Ef_0$ 可知

$$s_{u_1}(x, \xi) \geq \min(s_v(x, \xi), s_{Ef_0}(x, \xi))$$

$$\geq \min\left(r^{(0)}(x, \xi), \frac{n}{2} + 1\right).$$

一般地,若设

$$s_{u_k}(x, \xi) \geq \min\left(r^{(k-1)}(x, \xi), \frac{n}{2} + k\right) \qquad (3.3.25)$$

成立,则由引理 3.3.2 及引理 3.3.3 可知

$$s_{f_k}(x, \xi) \geq A\left[\min(r^{(k-1)}(x, \xi), \frac{n}{2} + k)\right]$$

$$= \min\left(A[r^{(k-1)}](x, \xi), \frac{n}{2} + k\right),$$

利用线性方程奇性传播定理,得

$$s_{Ef_k}(x, \xi) > \min\left(\inf_{(y, \eta) \in \Gamma^-(x, \xi)} A[r^{(k-1)}](y, \eta) + 1, \frac{n}{2} + k + 1\right).$$

由 $\quad u_{k+1} = v + Ef_k$,

$$s_{u_{k+1}}(x, \xi) \geq \min(s_v(x, \xi), s_{Ef_k}(x, \xi))$$

$$\geq \min\left(r^{(0)}(x, \xi), \inf_{(y, \eta) \in \Gamma^-(x, \xi)} A[r^{(k-1)}](y, \eta)\right.$$

$$\left. + 1, \frac{n}{2} + k + 1\right)$$

$$= \min\left(r^{(k)}(x, \xi), \frac{n}{2} + k + 1\right).$$

所以(3.3.25)式对一切 $k$ 成立.

当 $r(x, \xi)$为有限值时,取 $k$ 充分大,就有

$$s_u(x, \xi) = s_{u_{k+1}}(x, \xi) \geq r^{(k)}(x, \xi) \geq r(x, \xi). \qquad (3.3.26)$$

而当 $r(x,\xi)$ 取 $+\infty$ 时，$r^{(k)}(x,\xi)$ 也是 $+\infty$，所以(3.3.21)成立.□

下面考察一个例子，以获得对高维半线性波动方程奇性干扰的更具体的认识.

**例**　设 $\omega_i(i=1,2,3)$ 为 $S^{n-2}$ 中不相重叠的三点，初始条件(3.3.5)在 $x_n=0$ 上的 $(\omega_i,0)$ 处有奇性，而且，线性波动方程满足(3.3.5)的解 $v$ 的正则性函数 $s_v(x,\xi)$ 满足

$$s_v(x,\xi)\geq\begin{cases}s_0>\dfrac{n}{2},\ (x,\xi)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3;\\+\infty,\quad 其他,\end{cases}\tag{3.3.27}$$

式中 $\Gamma_i$ 为 $R_x^n\times R_\xi^n$ 中的次特征带，$\Gamma_i=\{(\omega_i(1-x_n),x_n;\omega_i,1)\}$，问非线性问题(3.3.4)与(3.3.5)的解的奇性分布如何？

为确定非线性问题解 $u$ 的奇性分布，我们构造正则性控制函数. 记 $P_i$ 为球面 $S^{n-1}$ 上的点 $\left(\dfrac{\omega_i}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，则可取

$$r^{(0)}(x,\xi)=\begin{cases}s_0>\dfrac{n}{2},若(x,\xi)\in\bigcup\Gamma_i;\\\infty,\quad 其他,\end{cases}$$

从而

$$A[r^{(0)}](x,\xi)=\begin{cases}s_0,\ (x,\xi)\in\bigcup\Gamma_i;\\2s_0-\dfrac{n}{2},\ x=x_0,\ \xi\in\widehat{P_iP_j};\\3s_0-n,\ x=x_0,\ \xi\in\triangle P_1P_2P_3,\end{cases}$$

其中 $\triangle P_1P_2P_3$ 为三段大圆弧 $\widehat{P_iP_j}$ 所围成的球面三角形. 由于当 $\xi$ 落在 $\widehat{P_iP_j}$ 内或在 $\triangle P_1P_2P_3$ 内时，$(x,\xi)$ 不属于方程的特征集，故这些点的奇性不可能传播出去. 从而有

$$r^{(1)}(x, \xi) = \min(A[r^{(0)}](x, \xi) + 1, r^{(0)}(x, \xi)),$$

$$A[r^{(1)}](x, \xi) = A[r^{(0)}](x, \xi),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$r(x, \xi) = \min(A[r^{(0)}](x, \xi) + 1, r^{(0)}(x, \xi)),$$

故得到 $u$ 的正则性函数的估计:

$$s_u(x, \xi) \geq \begin{cases} s_0, & (x, \xi) \in \bigcup \Gamma_i; \\ 2s_0 - \dfrac{n}{2} + 1, & x = x_0, \xi \in \bigcup \widehat{P_i P_j}; \\ 3s_0 - n + 1, & x = x_0, \xi \in \triangle P_1 P_2 P_3; \\ +\infty, & \text{其他}. \end{cases} \tag{3.3.28}$$

上述计算表明,除 $x_0$ 点外,解 $u$ 的奇性仍限制在 $\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ 上,这时,虽然载有半线性波动方程解的奇性的三条次特征线相交于一点,但不会有因干扰而产生的额外奇性往外传播.

但是,如果将 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 保持不变,而将 $\Gamma_3$ 改为$\{(\omega_3(1-x_n), x_n; -\omega_3, -1)\}$,则情形就不同了.这是因为此时在 $x_0$ 点的余切空间中的单位球上,$\triangle P_1P_2P_3$ 内可能含有这样的 $\xi$,使$(x_0, \xi)$落在波动算子$\square$的特征集上.事实上,用大圆弧连接 $P_3$ 与$\widehat{P_1P_2}$中的任意点,该大圆弧就必与特征点集$\left\{\left(x_0; \dfrac{\omega}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right); \omega \in S^{n-2}\right\}$相交.记此交点集为$\{\tilde{\gamma}\}$,易知在$\{\tilde{\gamma}\}$上 $A[r^{(0)}]$至少按微局部意义是 $H^{3s_0-n}$ 正则的.于是记

$$\tilde{\Gamma} = \left((1 - x_n)\omega_0, x_n; \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 $x_n > 1$, $\omega_0 \in S^{n-2}$ 是使$\left(x_0; \dfrac{\omega}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \tilde{\gamma}$ 的点,则

$$r^{(1)}(x,\xi)=\begin{cases} s_0,\ (x,\xi)\in\bigcup\Gamma_i; \\ 2s_0-\dfrac{n}{2}+1,\ x=x_0,\ \xi\in\bigcup\widehat{P_iP_j}; \\ 3s_0-n+1,\ x=x_0,\ \xi\in\triangle P_1P_2P_3 \\ \qquad\qquad \text{或}(x,\xi)\in\{\tilde{\Gamma}\}; \\ +\infty,\ \text{其他}. \end{cases}$$

$$r^{(2)}(x,\xi)=r^{(1)}(x,\xi),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r(x,\xi)=r^{(1)}(x,\xi).$$

再利用 $\epsilon$ 的任意性,可得

$$s_u(x,\xi)\geq\begin{cases} s_0,\ (x,\xi)\in\bigcup\Gamma_i; \\ 2s_0-\dfrac{n}{2}+1,\ x=x_0,\ \xi\in\bigcup\widehat{P_iP_j}; \\ 3s_0-n+1,\ x=x_0,\ \xi\in\triangle P_1P_2P_3 \\ \qquad\qquad \text{或}(x,\xi)\in\{\tilde{\Gamma}\}; \\ +\infty,\quad \text{其他}. \end{cases} \tag{3.3.29}$$

此式表示在次特征带集$\{\tilde{\Gamma}\}$上,可能载有解 $u$ 的奇性.这正是由非线性干扰所产生的额外奇性传播所导致的.

从以上的讨论可见,对于给定的 $H^s$ 解 $u$,由于线性传播与非线性复合的双重作用,解在某些点的奇性会扩散到空间中较大的范围中.但我们在这里特别指出,定理 3.3.1 与上面的例子中对解的奇性的分析是对最低限度正则性的分析,它只说明奇性可能在某些次特征上出现.一个自然的问题是:能否断定解的奇性一定会在某些次特征上出现?这是一个很有意思的问题,且往往需要十分

细致的讨论. 在文献[6]中已构造了一个确实载有如例中所描写的额外奇性的解.

关于半线性方程额外奇性的生成,M. Beals 还证明了如下的命题(见文献[7]):

**定理 3.3.2** 设 $s > \frac{n+1}{2}$, $n > 1$, 存在 $\beta \in C_0^\infty(R^{n+1})$, 以及具紧支集的函数 $u_0 \in H^s(R^n)$, $u_1 \in H^{s-1}(R^n)$, 满足 $\text{sing supp}\,(u_0, u_1) = \{0\}$, 使得 Cauchy 问题

$$\begin{cases}(\partial_t^2 - \sum \partial_{x_i}^2)u = \beta u^3; \\ u|_{t=0} = u_0,\ u_t|_{t=0} = u_1\end{cases} \tag{3.3.30}$$

的解 $u \in H^s((0,1) \times R^n)$ 的奇支集充满整个锥 $\{(t,x); |x| < t, 0 \le t \le 1\}$, 在此锥上的奇性为 $H^{3s-n+2+\epsilon}$ 阶.

我们知道,波动算子由原点出发的所有次特征线都位于以原点为顶点的特征锥面上. 因此,按照线性方程解的奇性传播的特点,对线性波动方程的解而言,初始资料在原点的奇性至多只能传播到整个特征锥面上. 定理 3.3.2 却告诉我们,半线性方程 Cauchy 问题(3.3.26)的解的 $H^{3s-n+2+\epsilon}$ 阶奇性可以蔓延到特征锥面的表面和整个特征锥体的内部. 于是,这个特例就说明,即使对于半线性波动方程,3s 型的奇性传播定理也已是最佳的期望了. 对于一般的非线性方程,能期望的就更少. 因此,为刻画非线性方程解的更弱的奇性的传播或干扰等行为,必须引入新的概念与方法.

## §3.4 余法奇性的传播

如上节末尾所述,在研究非线性方程的解用波前集所刻画的奇性的传播与干扰时,至多只能考察 3s 型的奇性传播. 而对于一般的高阶方程还只能限于考察 2s 型的奇性传播. 这在奇性传播问题的研究中是一个很大的限制. 此外,在许多应用问题中,偏微分

方程解的奇性往往表现为波阵面，在波阵面外，解是光滑的；在波阵面上，解在它的法向有较强的奇性，而在它的切向，仅有弱得多的奇性. 这时，仅考察 $2s$ 型的奇性传播就无法刻画这些波阵面. 因此，现在要引进另一种描写函数奇性的方式，称为余法奇性. 并将载有余法奇性的分布称为余法分布. 由于所讨论的问题不同，余法分布也有多种定义方式. 总的来说，这个概念比较直观，它适合于直接描写波阵面的传播.

以下所讨论的余法分布，总是依赖于一个低维流形或低维流形集而定义的. 设 $S:\{S_1, \cdots, S_n\}$ 为 $\Omega\subset R^n$ 的 $C^\infty$ 子流形集合，$\mathscr{V}(S)$为 $C^\infty(\Omega, T(\Omega))$中所有与 $S$ 中每个 $S_i$ 都相切的切向量场集合. 如果按照向量场的换位运算，$\mathscr{V}(S)$构成 Lie 代数，即对任意 $V_1$、$V_2\in\mathscr{V}$，必有$[V_1, V_2]\in\mathscr{V}$，则称$\mathscr{V}(S)$为完备的.

切向量场集合 $\mathscr{V}(S)$的完备性与坐标选取无关，这一事实从几何意义上来看，是十分明显的. 今以 $S$ 仅含单个曲面的情形验证之. 设 $S$ 的方程为 $f(x)=0$，向量场 $V_1=\sum a_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$V_2=\sum b_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 属于 $\mathscr{V}(S)$ 即表示 $\sum a_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\sum b_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0$，而 $[V_1, V_2]\in\mathscr{V}(S)$ 要求

$$\sum\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i}-b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}=0. \tag{3.4.1}$$

若作坐标变换 $x=x(y)$，则 $S$ 变成 $g(y)\equiv f(x(y))=0$，$V_1$、$V_2$ 变成 $\sum\tilde{a}_k\dfrac{\partial}{\partial y_k}$，$\sum\tilde{b}_k\dfrac{\partial}{\partial y_k}$，其中 $\tilde{a}_k=a_i\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$，$\tilde{b}_k=b_i\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}$，于是

$$\sum\left(\tilde{a}_k\frac{\partial\tilde{b}_l}{\partial y_k}-\tilde{b}_k\frac{\partial\tilde{a}_l}{\partial y_k}\right)\frac{\partial g}{\partial y_l}$$

$$=\sum\left(a_i\frac{\partial\tilde{b}_l}{\partial x_i}-b_i\frac{\partial\tilde{a}_l}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_h}\frac{\partial x_h}{\partial y_l}$$

$$= \sum\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + a_ib_j\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_j\partial x_i}\right.$$

$$\left. - b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} - b_ja_i\frac{\partial^2 y_l}{\partial x_ix_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_h}\frac{\partial x_h}{\partial y_l}$$

$$= \sum\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_h}\delta_{hj} = 0,$$

所以在新坐标系中来看，$[V_1, V_2]$仍与 $S$ 相切.

**定义 3.4.1** 若$\mathscr{V}(S)$为完备的切向量场集，函数 $u \in H^s_{loc}(\Omega)$，且对任意的 $i \le k$，以及 $V_1, \cdots, V_i \in \mathscr{V}(S)$ 有

$$V_1\cdots V_i u \in H^s_{loc}(\Omega), \tag{3.4.2}$$

则称 $u$ 是 $H^s_{loc}$上相对于 $S$ 的 $k$ 阶余法分布，记为 $u \in H^{s,k}(\Omega, S)$，并将 $H^{s,k}(\Omega, S)$ 称为余法分布空间.

如前面多次说明的，函数的奇性是一种局部性质. 故为使记号简单起见，以后如无特别需要，我们均将下标 loc 略去.

在此我们用一些微分几何的术语来说明余法分布的几何意义：取 $S$ 中的任一子流形 $S$，对于任一点 $x \in S$，可以作 $S$ 在 $x$ 的切空间 $T_x(S) \subset T_x(R^n)$，$S$ 在 $x$ 点处的法向量均属于余切空间 $T^*_x(R^n)$，它们的全体构成余法空间

$$N_x(S) = \{\xi \in T^*_x(R^n);\ \langle\alpha, \xi\rangle = 0,\ \forall\ \alpha \in T_x(S)\}.$$

当 $x$ 遍历 $S$ 时，$N_x(S)$全体构成集合 $\bigcup_{x\in S} N_xS$，对此集合可以赋予向量丛的结构，称之为余法丛$N^*(S)$. 显然，$\mathscr{V}(S)$中的任一向量场都是 $N^*(S)$的零化子，反之亦然. 所以余法分布在 $S$ 所含有的各子流形的切方向有较高的正则性，而在余法方向载有较高的奇性，这就是我们将 $H^{s,k}(\Omega, S)$称为余法分布空间的由来.

完备的向量场集合 $\mathscr{V}(S)$中可以选出一组基 $B$: $\{\tilde{V}_1, \cdots, \tilde{V}_N\}$，它的含义是：对任一向量场 $V \in \mathscr{V}$，必可从此基中选出 $\tilde{V}_{i_1}, \cdots, \tilde{V}_{i_l}$，并将 $V$ 表示成它们的线性组合：$V = \sum_{s=1}^{l} a_s\tilde{V}_{i_s}$，其中 $a_s$ 均

为 $\Omega$ 上的 $C^\infty$ 函数. 于是, $\mathscr{V}$ 的完备性可以表述为: 对任意 $V_i$、$V_j \in B$, 存在 $C^\infty$ 系数 $C_{ij}^k$ 使得

$$[V_i, V_j] = \sum C_{ij}^k V_k. \qquad (3.4.3)$$

显然, (3.4.2) 式中作用于 $u$ 的向量场可以只在某一组基中选取. 利用给定的一组基, 我们还可以定义 $H^{s,k}(\Omega, S)$ 的范数为

$$\| u \|_{H^{s,k}(\Omega, S)} = (\sum \tilde{V}_{i_1} \cdots \tilde{V}_{i_l} u)^{1/2}, \qquad (3.4.4)$$

其中 $l \leq k$, 而 $\tilde{V}_{i_1}$, …, $\tilde{V}_{i_l}$ 为任意方式选自基中的向量场组. 显然, 按 $H^{s,k}(\Omega, S)$ 的不同基的选取所导出的范数都是等价的.

若 $u \in H^{s,k}(\Omega, S)$, 则在 $S$ 外 $u \in H^{s+k}$. 又若 $u \in S$, 在 $x$ 的邻域中, $S$ 为过 $x$ 的一个光滑超曲面 $S_0$(余维数为 1 的子流形), 则 $u$ 在 $S_0$ 的法向为 $H^s$ 微局部正则, 而在 $S_0$ 的切向为 $H^{s+k}$ 微局部正则. 由于 $s$ 与 $k$ 没有直接的关系, 所以在方程的解 $u$ 仅属于 $H^s$ 的假定下, 余法分布可以用于考察解在某些方向具有很弱的奇性的传播.

下面给出一些例子, 以便对余法分布有些较具体的认识.

**例 1** 当 $S$ 为单张超曲面 $S_1: x_1 = 0$ 时, $\mathscr{V}(S)$ 的基可取为

$$x_1 D_{x_1},\ D_{x_2},\ \cdots,\ D_{x_n}.$$

由直接演算可知 $\mathscr{V}(S)$ 是完备的. 又由定义可见, 空间 $H^{s,k}(\Omega, S_1)$ 由一切满足条件

$$(x_1 D_{x_1})^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} u \in H^s(\Omega),\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$$

的函数所构成.

**例 2** 若 $S$ 由平面 $S_1: x_1 = 0$, $S_2: x_2 = 0$ 以及它们的交 $\Gamma: x_1 = x_2 = 0$ 所构成, 则 $\mathscr{V}(S)$ 的基可以选取为:

$$x_1 D_{x_1},\ x_2 D_{x_2},\ D_{x_3},\ \cdots,\ D_{x_n}.$$

也容易通过直接演算, 得知 $\mathscr{V}(S)$ 是完备的. 而空间 $H^{s,k}(\Omega, S)$

由一切满足条件

$$(x_1D_{x_1})^{\alpha_1}(x_2D_{x_2})^{\alpha_2}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n}u \in H^s(\Omega),$$

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$$

的函数所构成.

如本章前两节所看到的,所考察的具有特定奇性分布的函数类,是否关于非线性运算为封闭的性质,在研究非线性方程解的奇性分析中是至关重要的. 为此,我们证明以下的引理:

**引理 3.4.1** 若 $\mathscr{V}(S)$ 为上面引进的向量场集合,$s > \frac{n}{2}$,$k$ 为正整数,$u$、$v \in H^{s,k}$,$f(x, u)$ 为其变元的 $C^\infty$ 函数,则 $uv \in H^{s,k}$,$f(x, u) \in H^{s,k}$.

**证明** 先设 $k = 1$,对 $uv$ 作用 $\mathscr{V}$ 中的算子 $V$,我们有

$$V(uv) = uVv + vVu. \tag{3.4.5}$$

由 Schauder 引理知上式右端均属于 $H^s$,由于 $V$ 可取为 $\mathscr{V}$ 中的任意元素,故 $uv \in H^{s,1}$,$f(x, u) \in H^{s,1}$. 对于 $k > 1$ 的情形,可以利用微分的 Leibniz 公式证得 $uv \in H^{s,k}$.

现考察 $f(x, u)$. 将算子 $V$ 作用于它,可得

$$Vf(x, u) = f_1(x, u) + f_u(x, u)Vu. \tag{3.4.6}$$

显然,$Vu \in H^s$. 由于 $u \in H^s$,故 $f_1(x, u)$、$f_u(x, u) \in H^s$. 从而(3.4.6)的右端属于 $H^s$,这说明 $f(x, u) \in H^{s,1}$. 今若对某个正整数 $k_1 < k$ 证明了 $u$ 的任意非线性复合属于 $H^{s,k_1}$,则(3.4.6)的右端为 $H^{s,k_1}$ 函数的乘积,从而仍属于 $H^{s,k_1}$. 这说明 $f(x, u) \in H^{s,k_1+1}$. 依此法递推,即得 $f(x, u) \in H^{s,k}$. □

下面讨论在区域 $\Omega$ 中的半线性方程

$$Pu = F(x, u, \cdots, D^{m-1}u) \tag{3.4.7}$$

解的余法奇性沿特征曲面的传播,这里 $P$ 是 $m$ 阶具有 $C^\infty$ 实系数的线性偏微分算子,$F$ 是它的变元的 $C^\infty$ 函数. 如上节那样,我们设

$\Omega_+ = \Omega \cap \{x_n > 0\}$ 含于 $\Omega_- = \Omega \cap \{x_n < 0\}$ 的决定区域内. 并设 $P$ 的主象征 $p_m(x, \xi)$ 作为 $\xi_n$ 的多项式,其实特征根均为单根. 我们有如下定理:

**定理 3.4.1**　设 $S$ 是区域 $\Omega$ 中算子 $P$ 的特征曲面,$u$ 是方程 (3.4.7) 的 $H^s(\Omega)$ 解, $s > \frac{n}{2} + m - 1$, 且 $u \in H^{s,k}(\Omega_-, S)$, 则 $u \in H^{s,k}(\Omega, S)$.

**证明**　通过适当的坐标变换,可设 $S$ 的方程为 $x_1 = 0$. 于是算子 $P$ 可以写成

$$P = x_1 a_1(x) D_{x_1}^m + \sum_{j=2}^{n} A_j(x, D_x) D_{x_j} + A_0(x, D_x), \tag{3.4.8}$$

其中 $a_1(x) \in C^\infty$, $A_j(j = 0, 2, \cdots, n)$ 是 $m-1$ 阶偏微分算子. 对于 $\mathscr{V}(S)$ 的基向量场 $V_1 = x_1 D_{x_1}$, $V_j = D_{x_j}(j \geq 2)$, 我们可以通过直接的计算写出

$$[V_i, P] = B_{i0} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij} V_j + B_i P, \tag{3.4.9}$$

其中 $B_{ij}$ 是以 $C^\infty$ 函数为系数的 $m-1$ 阶偏微分算子,面 $B_i$ 是 $C^\infty$ 函数. (3.4.9)说明 $V_i$ 与 $P$ 的交换子可以表示为 $V_i$ 与 $P$ 的线性组合. 此式也称为*交换子关系式*.

将恒等算子 $I$ 视为 $V_0$,则 $[V_0, P]$ 自然也可写成(3.4.9)的形式,其中相应的 $B_0$、$B_{0j}$ 均为零. 于是,在方程(3.4.7)两端作用算子 $V_i(0 \leq i \leq n)$, 就可得到

$$PV_i u + \sum_{j=0}^{n} B_{ij} V_j u = V_i F(x, u, \cdots, D^{m-1} u). \tag{3.4.10}$$

令 $U = {}^t(u, V_1 u, \cdots, V_n u)$, 通过求导运算可以将(3.4.10)的右端写成 $F_i(x, U, \cdots, D^{m-1} U)$的形式,其中 $F_i$ 为其变元的 $C^\infty$ 函数.

将所有对应于 $0 \le i \le n$ 的(3.4.10)式用矩阵形式写为

$$PU + BU = F(x, U, \cdots, D^{m-1}U). \qquad (3.4.11)$$

此式左端是一个 $m$ 阶算子矩阵,其主象征为对角阵,对角线上每个元素都是 $p_m(x, \xi)$,根据定理的假设知 $U \in H^s(\Omega_-)$,所以利用定理 3.1.4 的注可知 $U \in H^s(\Omega)$. 故 $u \in H^{s,1}(\Omega, S)$. 这样就在 $k = 1$ 情形下证明了本定理.

为讨论 $k > 1$ 的情形,需要一个比(3.4.9)更一般的交换子关系式,即

$$[V^I, P] = \sum_{|J| \le |I|} B_{I,J} V^J + \sum_{|K| \le |I|-1} C_{I,K} V^K P, \qquad (3.4.12)$$

式中 $V^I = V_{i_1} \cdots V_{i_l}$, $|I| = l$, 又 $B_{I,J}$ 为 $m-1$ 阶偏微分算子, $C_{I,K}$ 为 $C^\infty$ 函数. 这个交换子关系式不难用归纳法证得. 事实上,若(3.4.12)对满足 $|I| = k$ 的 $I$ 成立,则对满足 $|I'| = k+1$ 的指标 $I'$ 有

$$\begin{aligned}
[V^{I'}, P] &= [V_i V^I, P] = V_i[V^I, P] + [V_i, P]V^I \\
&= V_i\Big(\sum_{|J| \le k} B_{I,J} V^J + \sum_{|J| \le k-1} C_{I,J} V^J P\Big) \\
&\quad + \Big(B_{i0} + \sum_{1 \le j \le n} B_{ij} V_j + B_i P\Big) V^J \\
&= \sum_{|J| \le k+1} B'_{I,J} V^J \\
&\quad + \sum_{|J| \le k} C'_{I,J} V^J P - B_i[V^I, P] + B_i V^I P,
\end{aligned}$$

再将 $|I| = k$ 的(3.4.12)式代入右端,即得 $|I| = k+1$ 的(3.4.12)式. 于是,由归纳法可知,交换子关系式(3.4.12)对一切重指标 $I$ 成立.

有了一般的交换子关系式,令 $U_k$ 是列向量 ${}^t(u, \cdots, V^I u, \cdots)$,该列向量中包含所有形式为 $V_{i_1} \cdots V_{i_l} (l < k)$ 的元素,则通过对(3.4.7)两端作用算子 $V^I$,并利用(3.4.12)即可得到方程组

$$P_kU_k + B_kU_k = F_k(x, D^\beta U_k). \qquad (3.4.13)$$

此式左端仍为一个偏微分算子矩阵(但其阶数随 $k$ 的增大而迅速增大),其主象征为对角阵,对角元素都是 $p_m(x, \xi)$. (3.4.13)的右端只涉及到 $U_k$ 的不超过 $m-1$ 阶的导数,且 $F_k$ 为其变元的 $C^\infty$ 函数. 同样,利用定理的条件可知,$U_k \in H^s(\Omega_-)$,故再次利用定理 3.1.4 及其注,可知 $U_k \in H^s(\Omega)$,即 $u \in H^{s,k}(\Omega, S)$. □

从以上的证明过程可知,在建立了一个描写解的余法奇性的向量场集 $\mathscr{V}(S)$以后,证明余法奇性传播规律的关键就是证明交换子关系式(3.4.9)或(3.4.12). 这一点在以后的讨论中可反复地看到,因此,像定理 3.4.1 的这种证明方法也称为*交换子方法*. 当然,$\mathscr{V}(S)$本身的完备性以及相应的余法分布空间关于非线性复合为封闭性,都是在讨论奇性传播时必须作的准备.

以下再讨论载有余法奇性的两个曲面相交的情形. 设区域 $\Omega$ 和方程与前相同,曲面 $S_1$、$S_2$ 为算子 $P$ 的特征曲面,它们横截相交于 $\Omega_+$ 中的 $\Gamma$,且过 $\Gamma$ 无其他的特征曲面. 又设在 $\Omega_-$ 上方程(3.4.7)的解在特征曲面 $S_1$、$S_2$ 上有余法型奇性. 我们将$\{S_1, S_2, \Gamma\}$记为 $S$,$\mathscr{V}(S)$为前面所对应的切向量场集合,这时有如下的结论:

**定理 3.4.2** 设 $u$ 是方程(3.4.7)的 $H^s(\Omega)$解,$s > \frac{n}{2} + m - 1$,$u$ 在 $\Omega_-$ 上的限制属于 $H^{s,k}(\Omega_-, S_1 \cup S_2)$,则 $u$ 在整个 $\Omega$ 中属于 $H^{s,k}(\Omega, S)$.

**证明** 如同定理 3.4.1 的证明那样进行. 现就几个关键点作说明:由例 2 知,$\mathscr{V}(S)$是完备的,从而可以定义空间$H^{s,k}(\Omega, S)$,它关于非线性复合为封闭的,所以问题的关键在于,证明交换子关系成立. 在适当的坐标变换下,$S_1$、$S_2$ 可取形式 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. 由于它们是算子 $P$ 的特征曲面,故 $P$ 应具有形式

$$P = KD_{x_1}D_{x_2} + \sum_{j=1}^{n} A_jV_j + A_0, \qquad (3.4.14)$$

其中 $V_1 = x_1 D_{x_1}$, $V_2 = x_2 D_{x_2}$, $V_j = D_{x_j}(j \geq 3)$, $K$ 为 $m-2$ 阶, $A_j(1 \leq j \leq n)$ 为 $m-1$ 阶. 因为算子 $P$ 没有过 $\Gamma$ 的其他特征曲面, 故在 $x_1 = x_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0$ 上 $K$ 的象征 $k(x, \xi) \neq 0$. 记 $H$ 是以 $h(x, \xi) = (k(x, \xi) + \sum_{i=3}^{n} \xi_i^{m-2})^{-1}$ 为象征的 $2-m$ 阶拟微分算子, 则有

$$HK = I + \sum_{j=1}^{n} R_j V_j + R_0, \tag{3.4.15}$$

其中 $R_j$ 都是 $-1$ 阶的, 故

$$D_{x_1} D_{x_2} = D_{x_1} D_{x_2}\left( HK - \sum_{j=1}^{n} R_j V_j + R_0 \right)$$

$$= HP + \sum_{j=1}^{n} B_j V_j + B_0,$$

其中 $B_j(0 \leq j \leq n)$ 为一阶算子. 于是, 根据 $P$ 的表示式(3.4.14), 交换子 $[P, V_j]$ 可写成

$$[P, V_j] = \sum C_j V_j + C_0 + G D_{x_1} D_{x_2}$$

$$= \sum C_j V_j + C_0 + GHP + \sum E_j V_j + E_0,$$

其中 $C_j$、$E_j$ 是 $m-1$ 阶算子, 而 $G$ 是 $m-2$ 阶算子.

将 $V_1, \cdots, V_n$ 作用于方程(3.4.7), 并记 $U_1 = {}^t(u, V_1 u, \cdots, V_n u)$, 可得方程组

$$P_1 U_1 + B_1 U_1 = L F_1(x, U_1, \cdots, D^{m-1} U_1), \tag{3.4.16}$$

其中 $B_1$ 为 $m-1$ 阶拟微分算子矩阵, $L$ 为零阶拟微分算子. 与(3.4.11)相比, 方程组的左端的主部相同, 而右端多出的零阶拟微分算子是 $H^s$ 到 $H^s$ 的映照, 所以仍能用定理3.1.4的方法证明从 $U_1 \in H^s(\Omega_-)$ 可推得 $U_1 \in H^s(\Omega)$, 所以 $u \in H^{s,1}(\Omega, S)$.

$u \in H^{s,k}(\Omega, S)$ 的结论可以用归纳法推得. □

定理 3.4.2 说明了当两个载有余法奇性的特征曲面横截相交

时，如果过交线没有方程的其他特征面，则奇性沿着特征曲面传播. 并不产生新的奇性. 但是如果有其他的特征曲面通过该交线，情形就不同了. 这时，也必须考虑非线性奇性干扰现象，对此将在下节中进行讨论.

## §3.5 余法奇性的干扰

### 一、余法分布概念的拓广

在上节中，曾经看到了在证明余法奇性传播的定理中，向量场集 $\mathscr{V}(S)$ 对于偏微分算子 $P$ 的交换子关系式起着关键的作用. 然面，在有多个特征曲面横截相交于同一子流形时，这样的交换子关系式并不一定成立，这时就需要设法扩充交换子的涵义，使之适合于分析解的奇性. 现在先用一个例子来说明交换子性质不成立的情况确实存在，而且实际上是很多的.

例如，若考察方程 $Pu = f(x, u, Du, D^2u)$ 的解的奇性，其中 $P = D_{x_1}D_{x_2}(D_{x_1} + D_{x_2})$. 此时，算子 $P$ 关于方向 $(1, 1)$ 是双曲的. 如果已知在 $x_1 + x_2 < 0$ 时解 $u$ 在平面 $S_1: x_1 = 0$, $S_2: x_2 = 0$ 上有余法奇性，希望得知 $u$ 在 $x_1 + x_2 > 0$ 时的奇性. 记 $S$ 为由平面 $S_1: x_1 = 0$, $S_2: x_2 = 0$, $S_3: x_1 = x_2$ 以及它们的交 $\Gamma: x_1 = x_2 = 0$ 所组成的子流形集，现在首先来找出 $\mathscr{V}(S)$ 的基. 由上节例 2 知，若一个向量场 $V$ 与 $S_1$、$S_2$、$\Gamma$ 相切，它必可写成

$$a_1x_1D_{x_1} + a_2x_2D_{x_2} + \sum_{i=3}^{n} a_iD_{x_i}.$$

然而由于在 $S_3$ 上 $V$ 又与 $S_3$ 相切，故这个向量场在 $S_3$ 的余法丛上象征为零，从而有 $C^\infty$ 函数 $b$ 满足

$$a_1x_1 - a_2x_2 = b(x_1 - x_2),$$

由此可得

$$(a_1 - b)x_1 = (a_2 - b)x_2.$$

因为所有系数必须为 $C^\infty$，故又必须存在 $C^\infty$ 函数 $c$，使

$$a_1 - b = cx_2,\ a_2 - b = cx_1,$$

这样一来,$V$ 可以写成

$$b(x_1D_{x_1} + x_2D_{x_2}) + cx_1x_2(D_{x_1} + D_{x_2}) + \sum_{i=3}^{n} a_iD_{x_i}. \tag{3.5.1}$$

反之,任一具有(3.5.1)形式的向量场必与 $S$ 中每一个子流形相切,故属于 $\mathscr{V}(S)$. 以上的推导说明了 $\mathscr{V}(S)$的基可以取为

$$V_1 = x_1D_{x_1} + x_2D_{x_2},\quad V_2 = x_1x_2(D_{x_1} + D_{x_2}),$$

$$V_i = D_{x_i} (i \geq 3). \tag{3.5.2}$$

现在来考察交换子关系:作 $P$ 与 $V_2$ 的交换子,利用 Poisson 括号的记号

$$\{f(x,\xi),\ g(x,\xi)\} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right), \tag{3.5.3}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}[P,V_2] &= \{\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2),x_1x_2(\xi_1+\xi_2)\}\\ &= 2(x_1+x_2)\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2)\\ &\quad + (\xi_1+\xi_2)(x_1\xi_1^2 + x_2\xi_2^2)\\ &= 2(x_1+x_2)P + (\xi_1+\xi_2)(x_1\xi_1^2 + x_2\xi_2^2).\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

显然,若要交换子关系成立,$(\xi_1+\xi_2)(x_1\xi_1^2 + x_2\xi_2^2)$ 就应该能用 $P$、$V_1$、$V_2$ 的象征具有 $C^\infty$ 系数的线性组合表示. 由于 Sym $P$、Sym $V_2$、Sym $[P,V_2]$都含有 $\xi_1+\xi_2$ 的因子,而 Sym $V_1$ 不含这一因子,故$[P,V_2]$应该能用 $P$ 与 $V_2$ 线性表示,即 $x_1\xi_1^2 + x_2\xi_2^2$ 能用 $x_1x_2$ 与 $\xi_1\xi_2$ 线性表示. 现在可以简单地判定,这一要求是不可能

实现的.

因此,为了在更一般的情形下对方程解的余法奇性进行分析,必须在更广的意义上来理解交换子关系式.一个可行的办法是不要求交换子关系式(3.4.9)中的系数为$C^\infty$函数或偏微分算子,而允许它为拟微分算子.相应地,也不必要求(3.4.9)式在局部意义下成立,而仅要求它在微局部意义下成立.但要求我们将余法分布的概念作出新的解释.一些相应的性质,如余法分布空间关于非线性运算的封闭性需重新证明.以下就从这些基本的工作开始,对比上节的讨论,读者可清楚看到每一步讨论的目的以及下一步应该作什么.

现在由重新定义余法分布空间开始,以$OpS^k$记$k$阶拟微分算子类,对于给定的$OpS^1$类算子$M_1, \cdots, M_N$,构造以1与$\{M_j\}$为基以$OpS^0$算子为系数所生成的算子集合$\mathscr{M}$,称为$OpS^0$拟微分算子模.即

$$M \in \mathscr{M} \Longleftrightarrow M \in OpS^1,$$

且

$$M = \sum_{j=1}^{N} A_j M_j + A_0,\ A_j \in OpS^0. \tag{3.5.5}$$

很清楚,一个拟微分算子是否属于$\mathscr{M}$,只决定于它的主象征.因此,可以说一个算子$L$在$x_0$点局部地(相应地,在$(x_0, \xi_0)$点微局部地)属于$\mathscr{M}$,如果存在$M \in \mathscr{M}$,使$M - L$的主象征在$x_0$的邻域(相应地,在$(x_0, \xi_0)$的邻域)中为零.相仿地,还可以说,算子组$\{L_1, \cdots, L_N\}$在$x_0$的邻域局部地(相应地,在$(x_0, \xi_0)$的邻域微局部地)生成$\mathscr{M}$,如果对任一$M \in \mathscr{M}$,存在$A_j \in OpS^0 (1 \le j \le N)$,使得$M - \sum A_j L_j$的主象征在该邻域中为零.

(3.5.5)式类似于§3.3中以$V_1, \cdots, V_N$来构造$\mathscr{V}$的线性表示式,其重要的不同之处是(3.5.5)式中的$A_j$可以取为零阶拟微分算子.这比$C^\infty$函数的范围要宽得多.

利用(3.5.5)所定义的拟微分算子模,可以引入余法分布的第二个定义如下:

**定义 3.5.1** 若 $\mathscr{M}$ 为给定的定义在 $\Omega$ 上的 $OpS^0$ 拟微分算子模，且它关于拟微分算子的换位运算成 Lie 代数. 记 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M})$ 为如下的分布集合：

$$u \in H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M}) \Longleftrightarrow u \in H^s, M_{i_1} \cdots M_{i_l} u \in H^s, \tag{3.5.6}$$

其中 $l \leq k$, $M_{i_j} \in \mathscr{M}$，则称 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M})$ 为余法分布空间，其中的元素称为余法分布.

对于特定的子流形集合 $S$，相对于 $S$ 的 $\mathscr{M}$ 可取为所有的一阶拟微分算子集合，只要它的象征为$\{N^*(S), S \in S\}$的零化子. 显然，$\mathscr{V}(S)$中任一向量场都满足这一条件.

我们将定义 3.5.1 与§3.4 的定义 3.4.1 作比较. 对于给定的子流形集 $S$：$\{S_1, \cdots, S_N\}$，可作出相对于 $S$ 的切向量场集合 $\mathscr{V}(S)$以及作为诸 $N^*(S_i)$的零化子的拟微分算于集合 $\mathscr{M}$. 由于 $\mathscr{V}(S)$中任一向量场限制在余法丛$T^*S_1, \cdots, T^*S_N$上均为零，故 $\mathscr{V} \subset \mathscr{M}$，所以有 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M}) \subseteq H^{s,k}(\Omega, \mathscr{V})$. 那么是否可以进一步有 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M}) = H^{s,k}(\Omega, \mathscr{V})$ 呢？这要看具体情况而定.

当 $S$ 为单个曲面 $S$ 时，在通过适当的坐标变换，将 $S$ 化成 $x_1 = 0$ 以后，$\mathscr{V}(S)$的基就如上节例 1 所示，而 $\mathscr{M}$ 中任意元素的主象征 $p(x, \xi)$应当满足

$$p(x, \xi) = 0, \text{若 } x_1 = 0, \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0, \tag{3.5.7}$$

所以，$p(x, \xi)$可以写成

$$a_1(x, \xi)x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i(x, \xi)\xi_i, \tag{3.5.8}$$

其中 $a_1$ 为齐一次象征，$a_i(i \geq 2)$ 为齐零次象征. 将 $a_1$ 再写成 $\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i$，并将由 $i = 2$ 起的各项归入(3.5.8)的第二项中，即有

$$p(x, \xi) = b_1(x, \xi)x_1\xi_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i'(x, \xi)\xi_i, \tag{3.5.9}$$

所以，$\mathscr{M}$ 中的元素可利用 $\mathscr{V}$ 的基按(3.5.5)的要求表出，从而

$$H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M}) = H^{s,k}(\Omega, \mathscr{V}).$$

当 $S = S_1 \cup S_2 \cup (S_1 \cap S_2)$ 时，在通过适当的坐标变换 $S_1$、$S_2$，可化成 $x_1 = 0$、$x_2 = 0$，此时 $\mathscr{V}(S)$的基就如上节例 2 所示. $\mathscr{M}$ 中任意元素的主象征 $p(x, \xi)$应当满足：

$$p(x, \xi) = 0, \text{ 若}\begin{cases} x_1 = 0,\ \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0; \\ x_2 = 0,\ \xi_1 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0; \\ x_1 = x_2 = 0,\ \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0. \end{cases} \tag{3.5.10}$$

由(3.5.9)的第一条件 $p(x, \xi)$可写成

$$b_1(x, \xi)x_1\xi_1 + \sum_{i=2}^{n} a'_i(x, \xi)\xi_i.$$

以(3.5.9)的第二条件代入，又可将 $p(x, \xi)$写成

$$b'_1(x, \xi)x_1\xi_1 + b'_2(x, \xi)x_2\xi_2 + c(x)\xi_1\xi_2 + \sum_{i=3}^{n} a''_i(x, \xi)\xi_i. \tag{3.5.11}$$

再根据(3.5.9)的第三个条件知，$c(x)$可以写成 $c_1x_1 + c_2x_2$，从而 $c(x)\xi_1\xi_2$ 可以并入(3.5.11)的前两项中，所以 $\mathscr{M}$ 也能用 $\mathscr{V}$ 的基按(3.5.5)的要求表出. 故得 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M}) = H^{s,k}(\Omega, \mathscr{V})$.

但是，对更一般的子流形集 $S$，余法分布空间 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M})$与 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{V})$并非永远相同. 以本节初始所引入的 $S$ 为例，切向量场 $\mathscr{V}(S)$的基如(3.5.2)所示. 但是象征 $a(x, \xi) = x_1|\xi|^{-1}\xi_1(\xi_1 + \xi_2)$ 是 $T^*(S_i)$与 $T^*(\Gamma)$的零化子，却无法表示为(3.5.2)中诸算子象征的线性组合，因此，在这种情形下，$\mathscr{M}$ 比 $\mathscr{V}$ 的元素多，从而 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{V})$比 $H^{s,k}(\Omega, \mathscr{M})$含有更多的元素.

以下我们在整个 $R^n$ 中讨论问题，为了记号简单起见，也常常简记余法分布空间为 $H^{s,k}(\mathscr{M})$或 $H^{s,k}$. 下面一个问题是空间

$H^{s,k}(\mathscr{M})$是否关于非线性运算为封闭. 首先,当然是希望它关于乘法运算封闭. 可是,一般来说,这一点并不正确. 例如对二维情形,考察由拟微分算子 $(I-\Delta)^{-1/2}D_{x_1}D_{x_2}$ 所生成的模 $\mathscr{M}$. 由它构造空间 $H^{s,\infty}$,易见,对适当的正数 $\alpha$,函数 $|x_1|^\alpha$、$|x_2|^\alpha \in H^{s,\infty}$,但 $|x_1|^\alpha \cdot |x_2|^\alpha \notin H^{s,\infty}$,所以,为了使所要讨论的余法分布空间对于乘法封闭,我们需要对 $\mathscr{M}$ 加些限制.

**定义 3.5.2** 设 $\mathscr{M}$ 为一给定的拟微分算子模. 若对任一 $x_0 \in R^n$,以及任意的$\xi^{(1)}$,$\xi^{(2)}$,$\eta \in R^n\backslash 0$,存在 $x_0$ 的邻域中的向量场 $Z_1, \cdots, Z_q$,使

(1) $Z_j$ 在$(x_0, \xi^{(1)})$与$(x_0, \xi^{(2)})$邻域中微局部地属于 $\mathscr{M}$;

(2) 对一切 $M \in \mathscr{M}$,存在 $A_j \in OpS^0$ $(j=1, \cdots, q)$,使在$(x_0, \eta)$的邻域中 $\mathrm{Sym}(M - \sum A_j Z_j) = 0$.

则称 $\mathscr{M}$ 满足三点条件.

**定理 3.5.1** 设 $\mathscr{M}$ 满足三点条件,则对 $s > \frac{n}{2}$ 空间 $H^{s,k}(\mathscr{M})$成代数.

**证明** 由于 $\mathscr{M}$ 满足三点条件,故对任意的 $(\eta, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in S^{n-1} \times S^{n-1} \times S^{n-1}$,可以找到相应的向量场组$\{Z_j\}$,使定义 3.5.2 中的条件(1)、(2)在$(\eta, \xi^{(1)}, \xi^{(2)})$的某邻域 $O_j \times O_{j_1} \times O_{j_2}$ 中成立. 由 $S^{n-1}$的紧性,可以选出有限个这样的邻域组,使所有 $O_j \times O_{j_1} \times O_{j_2}$ 形式的开集组可覆盖 $S^{n-1} \times S^{n-1} \times S^{n-1}$. 据此有限覆盖可作拟微分算子的单位分解 $1 = \sum E_j(x, D_x)$,其中 $E_j \in OpS^0$,每个 $E_j$ 的象征的支集均在上述的开锥邻域中,于是对任意的 $u$、$v$,有

$$M(uv) = \sum_j \sum_{j_1} \sum_{j_2} E_j M(E_{j_1}u \cdot E_{j_2}v), \qquad (3.5.12)$$

上式右端的典型项可以写成

$$\begin{aligned} DM(Bu \cdot Cv) &= \sum D_j Z_j (Bu \cdot Cv) \\ &= \sum D_j (Z_j Bu \cdot Cv) + \sum D_j (Bu \cdot Z_j Cv). \end{aligned}$$

因为在 Sym$(B)$、Sym$(C)$的支集上,$Z_j$ 微局部地属于 $\mathscr{M}$,故 $Z_jB$、$Z_jC \in \mathscr{M}$. 利用 $\mathscr{M}$ 的基对 $Z_jB$、$Z_jC$ 进行分解,就可将 $M(uv)$表示为 $u$、$v$、$M_iu$、$M_iv$ 被作用零阶拟微分算子和作非线性复合后所得到的函数记成 $\mathscr{L}(u, v, M_iu, M_iv)$. 由于 $u$、$v$、$M_iu$、$M_iv \in H^s$,而零阶拟微分算子是 $H^s$ 到 $H^s$ 的映照,空间 $H^s$ 又关于非线性复合封闭,所以 $M(uv) \in H^s$,故 $uv \in H^{s,1}$. 这就说明 $H^{s,1}$成代数. 进而可用归纳法证明对任意正整数 $k$,空间 $H^{s,k}$成代数. □

我们在此分别给出一个满足与不满足三点条件的拟微分算子模的例子.

**例 1**　设 $S$ 是由横截相交与 $\Gamma$ 的曲面 $S_1, \cdots, S_N$ 与 $\Gamma$ 组成的. $\mathscr{M}$ 为由这样的一阶拟微分算子组成的,它们的象征在所有的 $N^*(S_j)$ 与 $N^*(\Gamma)$ 上为零,则 $\mathscr{M}$ 满足三点条件.

事实上,对于给定的三点$(x_0, \xi^{(1)})$、$(x_0, \xi^{(2)})$、$(x_0, \eta)$,在 $x_0 \notin \Gamma$ 时,$\mathscr{M}$ 满足三点条件是平凡的. 今若 $x_0 \in \Gamma$, 易见,$S_1$, $\cdots$, $S_N$ 中至少有 $N-2$ 个曲面不与 $\xi^{(1)}$、$\xi^{(2)}$正交,不妨设它们即 $S_3, \cdots, S_N$. 记 $S' = S_1 \cup S_2$, 则 $S'$ 的切向量场集 $\mathscr{V}(S')$可以由上节例 2 中所示的向量场基经坐标变换所得到的集合而生成. 又记 $\mathscr{M}_1$ 为象征在 $N^*(S_1)$、$N^*(S_2)$、$N^*(\Gamma)$上为零的一阶拟微分算子集合,则 $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}_1$, 且 $\mathscr{M}_1$ 可由 $\mathscr{V}(S')$生成. 于是,对任意的 $\eta$ 在$(x_0, \eta)$点 $\mathscr{M}$ 可由 $\mathscr{V}(S')$生成. 另一方面,在$(x_0, \xi^{(1)})$的邻域中或在$(x_0, \xi^{(2)})$的邻域中,$\mathscr{V}(S')$或 $\mathscr{M}_1$ 与 $\mathscr{M}$ 一致,故定义 3.5.2中的条件(1)、(2)均满足.

**例 2**　由 $M=(1-\Delta)^{-1/2}D_{x_1}D_{x_2}$ 所生成的拟微分算子模不满足三点条件. 事实上,$M$ 的象征为 $\xi_1\xi_2(1+|\xi|^2)^{-1/2}$. 我们取 $\xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \eta = (1, 0)$. 若在$(1, 0)$邻域中向量场 $\alpha_1D_{x_1}+\alpha_2D_{x_2}$可用 $M$ 表示,则 $\alpha_1 = 0$, 所以 $Z_1$、$Z_2$ 应取为 $D_{x_2}$,但在 $\eta = (1, 0)$ 的邻域中,$M$ 不能由 $D_{x_2}$生成.

## 二、拟复合

容易用递推法将定理 3.5.1 推广到任意个函数乘积的情形.

但为了将该定理推广到一般非线性函数的情形，在下面的讨论中，还常用到在此定理的证明中出现的记号 $\mathscr{L}(u, M^l u)$，它是对记号 $\mathscr{L}$ 中的变元进行有限次非线性复合与作用零阶拟微分算子后所得到的函数，并称之为拟复合.

**引理 3.5.1**　设 $A \in OpS^0$，其象征的支集含于一个小的凸锥 $\Gamma$ 中，$\mathscr{M}$ 为满足三点条件的 $OpS^0$ 算子代数，则对 $M \in \mathscr{M}$，$Mf(Au)$ 是一个拟复合，即可写成 $\mathscr{L}(u, M_j u)$.

**证明**　注意 $Au$ 的波前集含于 $\Gamma$ 中，且 $f(Au)$ 的波前集也是如此. 今设 $B(x, D)$ 是象征在 supp Sym$(A)$ 上为 1，在 supp Sym$(A)$ 的某邻域外为零的拟微分算子，则

$$Mf(Au) = BMf(Au) + (I - B)Mf(Au), \tag{3.5.13}$$

其中右端第二项是非线性正则算子(故为拟复合)，且对给定的 $t$，总有 $s$，使得

$$\| (I - B)Mf(Au) \|_t \leq C(1 + \| u \|_s)^N.$$

然后按三点条件，对 $\xi_1 = \xi_2 = \eta \in \Gamma$，且在 $\Gamma$ 充分细的假定下，有

$$\begin{aligned} BMf(Au) &= \sum C_j(Z_j f(Au)) \\ &= \sum C_j(f'(Au) Z_j Au). \end{aligned}$$

因为 $Z_j A \in \mathscr{M}$，所以(3.5.13)右端第一项也是拟复合. □

引理 3.5.1 可以粗略地理解为：当算子 $M$ 作用于非线性函数 $f(u)$ 时，可以替换成先将 $M$ 作用于 $u$，再叠加一个拟复合的作用.

**定理 3.5.2**　设 $\mathscr{M}$ 满足三点条件，$s > \frac{n}{2}$，$F(x, u_1, \cdots, u_N)$ 关于 $u$ 具有紧支集. $u_j(x)$ 均属于 $H^s(\mathscr{M}, k)$，则 $F(x, u_1(x), \cdots, u_N(x)) \in H^s(\mathscr{M}, k)$.

**证明**　将 $F(x, u_1, \cdots, u_N)$ 简记为 $F(u)$，当 $F \in C_0^\infty$ 时，可写出

$$F(u(x)) = \int \exp(\mathrm{i}\tau u(x)) \hat{F}(\tau) \mathrm{d}\tau, \tag{3.5.14}$$

其中$\hat{F}(\tau)$是关于 $u$ 的 Fourier 变换. 若 $1 = \sum_j E_j(x, D)$ 为充分细的单位分解,则有

$$\exp(i\tau u) = \prod \exp(i\tau E_j u).$$

利用定理 3.5.1 递推之,可知 $M\exp(i\tau u)$可写成 $\exp(i\tau E_j u)$、$M_k\exp(i\tau E_j u)$的拟复合 $\mathscr{L}(\exp(i\tau E_j u), M_k\exp(i\tau E_j u))$. 而由引理 3.4.1 知 $M_k\exp(i\tau E_j u)$是一个拟复合,故有

$$M\exp(i\tau u) = \mathscr{L}'(\tau u, \tau M_k u),$$

其中 $\mathscr{L}'$所包含的拟复合关系与 $\tau$ 无关. 所以 $\mathscr{L}'$至多是关于 $\tau$ 为幂次增长的. 由于$\hat{F}$为速降,故积分

$$\int \mathscr{L}'(\tau u, \tau M_k u)\hat{F}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

收敛,且该积分也属于 $H^s$.

用同样方法可处理 $M^l F(u)$,从而可得 $F(u) \in H^s(\mathscr{M}, k)$ 的结论. □

### 三、余法奇性干扰定理

有了以上的准备,就可以来讨论余法奇性的干扰,仍讨论半线性严格双曲型方程

$$P(x, D_x)u = F(x, \cdots, D^\beta u(x) \cdots)_{|\beta| \leq m-1}. \qquad (3.5.15)$$

设 $S_1$、$S_2$ 为(3.5.15)的两特征曲面,交于 $\Gamma \subset R^n_+$,而 $S_3, \cdots, S_m$ 为由 $\Gamma$ 发出的其他特征曲而(参见图 3.5.1). 则有如下定理:

**定理 3.5.3** 设 $u \in H^s\left(s > \frac{n}{2} + m\right)$ 是(3.5.15)的解. 对 $x_n < 0$, 有 $u \in H^{s,k}(R^n_-, S_1 \cup S_2)$, 则在 $R^n_+$ 中:

(1) $u \in H^{s+k}$在 $\bigcup_{i=1}^m S_i$ 外;

(2) $u \in H^{s,k}(\Omega_+, S_i)$ 在 $S_i \backslash \Gamma$ 的邻域$(i = 1, 2)$;

(3) 记 $t = 2s - \frac{n}{2} - m + 1$, 则当 $s + k \leqslant t$ 时, $u \in H^{s+k}$

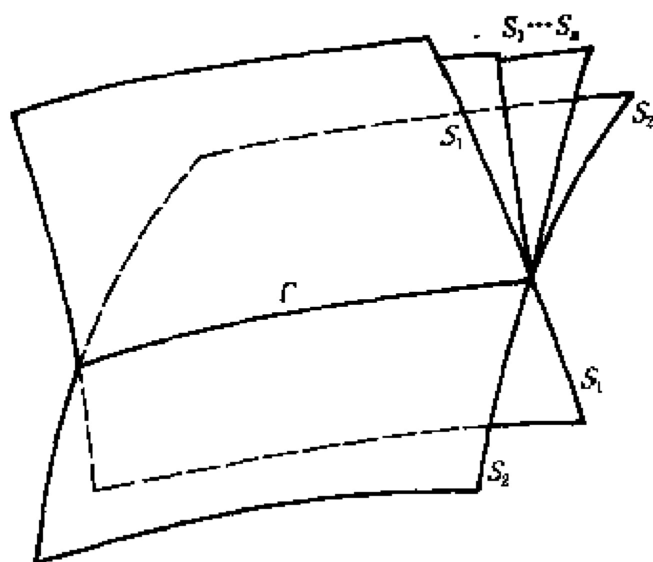



图 3.5.1

在 $S_j\backslash\Gamma$ 的邻域 ($j = 3, \cdots, m$)，否则，$u \in H^{s,l}(\Omega_-, S_j)$ 在 $S_j\backslash\Gamma$ 的邻域($j = 3, \cdots, m$)，其中 $l = [s + k - t]$.

**证明** 记 $S = \{S_1, \cdots, S_m, \Gamma\}$，设 $\mathscr{M}$ 是由主象征在所有 $S_i$ 与 $\Gamma$ 的余法丛上为零的一阶拟微分算子模. 按定义 3.5.1 来给出空间 $H^{s,k}(\mathscr{M})$. 如本节之初所述，在 $R^n_-$ 中 $H^{s,k}(\mathscr{M})$ 与 $H^{s,k}(S_1 \cup S_2)$ 一致，故在 $R^n_-$ 上 $u \in H^{s,k}(\mathscr{M})$. 根据前面例 2 的讨论知，在 $R^n_+$ 中 $\mathscr{M}$ 也满足三点条件，因此由定理 3.5.1 和 3.5.2 知，$H^{s,k}(\mathscr{M})$关于非线性复合运算封闭. 于是，为证明定理的结论，关键在于证明算子 $P$ 与 $\mathscr{M}$ 的生成元素的交换子关系成立，即需证明，对任意的 $M \in \mathscr{M}$，有

$$[P, M] \in OpS^{m-1} \cdot \mathscr{M} + OpS^0 \cdot P. \qquad (3.5.16)$$

注意，这个性质只涉及主象征，而且只需在微局部意义下证明这个不等式. 以下对($x_0$, $\xi$)所处位置的各种不同情形进行分析. 若对任一 $i$，有 $x_0 \notin S_i$，则(3.5.16)是平凡的. 若 $x_0 \in S_i\backslash\Gamma$，则在余法丛 $N^*(S_i)$上主象征 Sym($[P, M]$)为零，故$[P, M]$可用 $\mathscr{M}$ 表出. 若 $x_0 \in \Gamma$，$\xi$ 不在任一 $N^*(S_i)$上，由于 $\mathscr{M}$ 可微局部地表示任意拟微分算子象征，故(3.5.16)也能成立. 最后，剩下 $x_0 \in \Gamma$、

$\xi \in N^*(S_i)$ 的情形在下面进行讨论.

在最后一种情形下,先注意到在 $T^*(S_i)$的微局部邻域中 $M$ 微局部等价于 $S_i$ 的切向量场,故$[P, M]$在 $N^*(S_i)$上为零. 另一方面,由于算子 $P$ 为严格双曲算子,故它的特征是单重的,从而主象征 $\mathrm{Sym}(P)$在 $T_\Gamma^* = \bigcup\limits_{\tau\in\Gamma} T_\tau^*$ 上的限制仅在 $T^*(\Gamma) \cap T^*(S_i)$ 上有单零点,因此,可以找到零阶象征 $\lambda(x, \xi)$,使算子$[P, M] - \lambda(x, D)P$ 的主象征在 $T_\Gamma^*$ 上为零,所以这个主象征在 $T_\Gamma^* \cap T^*(S_i)$ 上为零,故$[P, M]-\lambda(x, D)P$ 微局部地属于 $\mathscr{M}$,即(3.5.16)成立.

下面我们如定理 3.4.1、3.4.2 那样来构造增广方程组,并用归纳法证明奇性传播结论. 将 $\mathscr{M}$ 的生成元素 $M_i (i = 1, \cdots, N)$ 作用于方程(3.5.15),可得

$$P(M_i u) = [P, M_i]u + M_i F(u, \cdots, D^\beta u),$$

利用交换子关系式

$$[P, M_i] = \sum B_{ij} M_j + B_{i0} + \lambda_i P, \qquad (3.5.17)$$

$P(M_i u)$可以写成

$$\sum B_{ij} M_j u + B_{i0} u + \lambda(x, D) F(u, \cdots, D^\beta u)$$
$$+ M_i F(u, \cdots, D^\beta u),$$

其中 $|\beta| \leq m - 1$. 又由定理 3.5.2 知,$M_i F(u, \cdots, \partial^\beta u)$为一拟复合,可以写成 $\mathscr{L}(u, \cdots, M_j \partial^\beta u)$. 因此,利用仿线性化(见附录),可以得到

$$P(M_i u) = \sum_j D_{ij} M_j u + D_{i0} u + r_i, \qquad (3.5.18)$$

其中 $D_{ij}$是 $Op\,\Sigma^{m-1}_{s-\frac{n}{2}-m+1}$ 类仿微分算子,$r_i \in H^{2s-\frac{n}{2}-2m+2}$. 于是,同上节中那样,可以得到仿微分方程组

$$PU = DU + R, \qquad (3.5.19)$$

其中$U=(u, M_1u, \cdots, M_Nu)P$是一阶偏微分算子矩阵,它的主象征为具有相同对角元素的对角阵,$D$由$(D_{ij})$所构成,$R\in H^{2s-\frac{n}{2}-2m+2}$. 注意,$U\in H^{s-1}(R^n)$,在$x_n<0$时$U\in H^s$,又在$T^*(S_1)\cup T^*(S_2)$外,$U$微局部地属于$H^{s+k-1}$. 利用定理 3.1.4 知,$U$的奇性沿次特征传播,故在整个$R^n$中$U$为$H^s$正则,并且在$T^*(S_1)\cup T^*(S_2)$外,$U$的更高的微局部正则性可由$s+k-1$与$2s-\frac{n}{2}-2m+2+(m-1)$中较小的值决定,所以$U\in H^s(R^n)$,并且在$T^*(S_1)\cup T^*(S_2)$外,$U$微局部地属于$H^{t_1}$,其中

$$t_1=\min\left(s+k-1,\ 2s-\frac{n}{2}-m+1\right).$$

利用归纳法,我们建立类似于(3.4.12)的高阶交换子关系式,从而可以构造出以所有$M^Iu$ ($M$为$\mathscr{M}$的生成元,$|I|\leq k$)为分量的向量函数$U_k$所满足的仿微分方程组. 这个增广方程组与(3.5.19)有同样的形式,其主部是一阶偏微分算子矩阵,它的主象征为具有相同对角元素的对角阵. 于是,对$|I|\leq k$,有$M^Iu\in H^s$,此即对一切$i$有$u\in H^{s,k}(S_i)$. 又在$T^*(S_1)\cup T^*(S_2)$外,只要$|I|\leq l$,就有$M^Iu\in H^{\min(s+k-l,\,t)}$微局部地成立,其中$t=2s-\frac{n}{2}-m+1$. 于是,取$l=[s+k-t]$,就得到$u$在$S_3, \cdots, S_n$附近如本定理结论(3)中所述的正则性. □

## 四、余法奇性反射

也可以在余法奇性的框架下讨论奇性反射问题. 例如考察双曲型方程的初边值问题,若载有余法奇性的特征曲面到达边界时与边界横截相交,则奇性会沿着通过交线的其他特征面继续传播,形成奇性反射. 这时的问题也可视为边界面对余法奇性的传播产生了干扰. 要对余法奇性反射现象给予严格的数学论证,会遇到一些新的困难. 例如需构造一个适当的空间,将解在特征曲面的切向正则性与法向正则性区分开来,同时又必须在含边界的区域中进行拟微分算子的运算等. 在这里不准备详细地叙述这些困难与解

决困难的办法，只在下面引述 Beals-Metivier 的一个结果. 读者可参阅文献[26]和[27]，而知其详情.

设 $\Omega$ 为 $R^n$ 中的开集，$\Omega^+ = \Omega \cap \{x_n > 0\}$，在 $\Omega^+$ 上考察边值问题：

$$\begin{cases} P(x, D_x)u = f(x, u, \cdots, D^{m-2}u), \ x_n > 0; \\ Bu|_{x_n=0} = 0, \end{cases} \tag{3.5.20}$$

其中 $P$ 是关于 $x_1$ 为严格双曲的，边界 $S_0: x_n = 0$ 为非特征，算子 $B$ 满足一致 Lopatinski 条件. 若 $\Delta$ 为边界 $S_0$ 上的 $n-2$ 维流形，$S_1, \cdots, S_N$ 为过 $\Delta$ 的 $n-1$ 维特征曲面，它们均与 $S_0$ 横截相交. 记 $S = \{S_0, S_1, \cdots, S_N\}$，$\mathscr{M}$ 为拟微分算子模，其中每个算子的主象征在 $S$ 中诸曲面的余法丛上为零. $H^{s,k} = H^{s,k}(\mathscr{M})$ 按定义3.4.1给出. $H_\Delta^{s,k}$ 为边界 $x_n = 0$ 上关于子流形 $\Delta$ 作出的余法分布，则有以下的结论：

**定理 3.5.4** 若 $u \in H^{s+m-1}(\Omega_+)$ 为问题(3.5.20)的解，$s > \frac{n}{2} - 1$，$u \in H^{s+m-1,k}(\Omega_+ \cap \{x_1 < 0\})$，则 $u \in H^{s+m-1,k}(\Omega_+)$，且 $u$在边界 $\partial\Omega$ 上的迹 $\gamma u \in H_\Delta^{s,k}(\partial\Omega)$.

因为在问题(3.5.20)中，变量 $x_1$ 起了时间变量的作用，故定理说明在 $x_1 < 0$ 时的余法奇性将保持到 $x_1 > 0$ 以后. 特别是，当 $\Delta$ 为 $x_1 = x_n = 0$ 时，过 $\Delta$ 的特征曲面 $S_1, \cdots, S_{N_1}$ 向下，而 $S_{N_1+1}, \cdots, S_N$ 向上，则定理表明在特征曲面 $S_1, \cdots, S_{N_1}$上的余法奇性(或其中任一特征曲面上的余法奇性)将反射到 $S_{N_1+1}, \cdots, S_N$ 上.

# 第 4 章

# 二次微局部分析与三叉干扰

在上一章讨论的余法奇性的干扰中，总要求载有奇性的特征曲面相交在一个 $n-2$ 维子流形上，形成一种扇状结构. 当 $n=3$ 时，扇状结构的直观意义更明显. 但是在高维空间中，还有可能出现另一类奇性结构. 例如在 $R^3_{t,x,y}$ 空间中，考察半线性变动方程

$$\Box u = f(t, x, y, u).$$

设 $u$ 在 $t<0$ 时，奇性出现在

$$\Sigma_i : t + x\cos\omega_i + y\sin\omega_i = 1 \ (i = 1, 2, 3)$$

上，由定理 3.5.3 知，在 $0<t<1$ 时，解的奇性仍局限在 $\Sigma_i$ 上. 但是，到 $t=1$ 时，三个特征曲面汇集到一点 $P(1, 0, 0)$，这时 § 3.5 中的讨论不再适用. 若将 $P$ 点视为一个新的奇性源，则可以预期在 $t>1$ 时，奇性除了沿 $\Sigma_i$ 继续传播外，还会在过 $P$ 的前向特征锥上出现新的奇性，于是载有奇性的诸特征曲面形成一种花状的奇性结构(参见图 4.3.1). 这种现象称为三叉干扰. 在这种情形下，为了对解的奇性作精确的分析，必须引进新的工具——二次微局部分析. 因为二次微局部分析对处理其他问题也很有用，并且还是更精细的高次微局部分析的一个实例(见文献[20])，故本章中将概要介绍二次微局部分析理论，并指出如何用它来处理奇性的三叉干扰问题.

## § 4.1 重二进分解

以下介绍二次微局部分析理论中能直接应用于处理奇性的三

叉干扰问题那一部分，因为这部分内容比较直观，而且它也是更一般情形的基础.

我们先从函数的重二进分解开始，在不同的文献中，重二进分解可以有不同的含义，这里所说的重二进分解是指：在底空间（其变量一般用 $x$ 表示）某点小邻域中的二进分解与对偶空间（其变量一般用 $\xi$ 中表示）大范围的二进分解的结合. 由于奇性的三叉干扰问题或更一般的花状奇性结构问题的研究，往往需要在一点的小邻域中作很细致的分析，所以用这种重二进分解为工具是合适的.

与一般二进分解所作的相仿，选取一个 $C^\infty$ 函数 $\phi(\xi)$，它的支集含在环 $\mathscr{C}_0$ 中，这里 $\mathscr{C}_0 = \{\xi \in R^n;\ \kappa^{-1} \leq |\xi| \leq 2\kappa\}$，$\kappa > 1$，$\phi(\xi)$ 满足 $\sum_{-\infty}^{\infty}\phi(2^{-j}\xi) = 1$. 记 $\psi(\xi) = 1 - \sum_{0}^{\infty}\phi(2^{-j}\xi)$，则任意 $u \in S'(R^n)$ 可以分解为

$$u = \psi(D)u + \sum_{j=0}^{\infty}\phi(2^{-j}D)u. \qquad (4.1.1)$$

(4.1.1)式对 $u$ 的谱作了二进环形分解，即在此式右端的和式中，除了第一项外，每项 $u_j = \phi(2^{-j}D)u$ 的谱落在一个环中，环的大小随 $j$ 的变化作 $2^j$ 倍的变化. 但二进环形分解只是对 $R^n_\xi$ 作分解，而在本节中，讨论的分解是在底空间与对偶空间中同时进行的.

**定义 4.1.1** 记算子

$$T_{pq} = \phi(2^p x)\phi(2^{-q}D),\ T^*_{pq} = \phi(2^{-q}D)\phi(2^p x), \qquad (4.1.2)$$

并称

$$u = \sum_{p,q}\phi(2^p x)\phi(2^{-q}D)u,\ \text{或}\ u = \sum_{p,q}\phi(2^{-q}D)\phi(2^p x)u \qquad (4.1.3)$$

为函数 $u$ 的重二进分解.

在以下的讨论中，总以 $\|u\|_s$ 记 $u$ 的 $H^s$ 模，以 $\|T\|$ 记算子 $T$ 作为 $L^2 \to L^2$ 的线性算子的模.

**定理 4.1.1** 对任意 $k$，存在常数 $C_k$，使 $p \leq q$，$p' \leq q'$ 时，

$$\| T_{p'q'} \circ T_{pq}^* \| \leq C_k 2^{-k(|p-p'|+|q-q'|)}, \tag{4.1.4}$$

$$\| T_{p'q'}^* \circ T_{pq} \| \leq C_k 2^{-k(|p-p'|+|q-q'|)}. \tag{4.1.5}$$

**证明** 设 $N_0$ 为二进分解中出现的整数，使得在 $|p-p'| > N_0$ 时，$\mathscr{C}_p$ 与 $\mathscr{C}_{p'}$ 不相交. 以下根据 $p$、$p'$、$q$、$q'$ 的取值分类进行讨论.

当 $|p-p'|$ 与 $|q-q'|$ 均不超过 $N_0$ 时，(4.1.4)、(4.1.5)右端是确定的有限值，则等式自然成立.

为讨论 $|p-p'|$ 或 $|q-q'|$ 超过 $N_0$ 时这两个算子的模，我们估计 $\|u\|_0 = \|v\|_0 = 1$ 时

$$(T_{p'q'} \circ T_{pq}^* u, v) = (T_{pq}^* u, T_{p'q'}^* v) \tag{4.1.6}$$

的值.

当 $|q-q'| > N_0$ 时，上式为零，因为相应 Fourier 变换的支集不相交.

当 $|q-q'| \leq N_0$，$|p-p'| > N_0$ 时，若记 $d$ 为supp $\phi(2^p x)$ 与 supp $\phi(2^{p'} x)$的距离，则 $R_x^n$ 空间中任一点与这两个支集的距离中至少有一个大于 $d/2$. 将内积(4.1.6)看成算子 $\phi(2^{-q}D)$、$\phi(2^{-q'}D)$分别作用于函数 $\phi(2^p x)u$、$\phi(2^{p'} x)v$ 以后所作的内积. 利用附录中定理 A.9，它可以用 $\phi(2^p x)$和 $\phi(2^{p'} x)$支集的距离 $d$ 与 $2^q$ 乘积的某个负次幂来估计. 而 $d \geq C2^{-\min(p,p')}$，故有

$$\begin{aligned} \| T_{p'q'} \circ T_{pq}^* \| &\leq \sup |(T_{p'q'}^* u, T_{pq}^* v)| \\ &\leq C_k (2^q d)^{-k} \leq C_k 2^{-k(q-\min(p,p'))}. \end{aligned}$$

利用 $p \leq q$、$p' \leq q'$，即得(4.1.4).

对于(4.1.5)的证明可按同一方式进行. 它的左端在 $|p-p'| > N_0$ 时为零，且在 $|p-p'| \leq N_0$，$|q-q'| \geq N_0$ 时，

$$\| T_{p'q'}^* \circ T_{pq} \| \leq C_k 2^{-k(\max(q,q')-p)}.$$

从而得定理的结论. □

**定理 4.1.2**　以下两件事实是等价的:

$$\| 2^{js}(1+2^j|x|)^{s'}u_j(x)\|_0 \le c_j;\ \sum c_j^2<\infty, \quad (4.1.7)$$

$$\begin{cases} \| T_{pq}u\|_0 \le c_{pq}2^{-qs}2^{-(q-p)s'};\ \sum\sum c_{pq}^2<\infty; \\ \| \psi(2^q x)\phi(2^{-q}D)u\|_0 \le c'_q 2^{-qs};\ \sum c'^2_q<\infty. \end{cases} \quad (4.1.8)$$

**证明**　根据函数 $\phi(x)$ 支集的性质, 由(4.1.8)可知

$$\| (2^p|x|)^{s'}\phi(2^p x)\phi(2^{-q}D)u\|_0 \le c_{pq}2^{-qs}2^{-(q-p)s'},$$

此即

$$\| (2^q|x|)^{s'}\phi(2^p x)\phi(2^{-q}D)u\|_0 \le c_{pq}2^{-qs}.$$

将此式平方后关于 $p$ 求和, 并将 $q$ 改记为 $j$, 即得

$$\| 2^{js}(2^j|x|)^{s'}u_j(x)\|_0 \le c_j;\quad \sum c_j^2<\infty.$$

再利用(4.1.8)的第二式, 其中 $\psi(2^q x)$ 在 $2^q x \le \kappa^{-1}$ 时为正, 故得(4.1.7).

又由不等式(4.1.7)成立, 可得 $\| 2^{js}u_j(x)\|_0 \le c_j$ 与 $\| 2^{js}(2^j|x|)^{s'}u_j(x)\|_0 \le c_j$. 由此容易得到(4.1.8)中的两式. □

如果函数 $u$ 满足(4.1.7)式, 则称 $u$ 属于 $H^{s,s'}$. 按此定义所得到的空间 $H^{s,s'}$ 是具有双指标的 Sobolev 空间. 显然, 当 $s\le s_1$, $s+s'\le s_1+s'_1$ 时, $H^{s,s'}\supseteq H^{s_1,s'_1}$. 又由直接的运算知, 微分算子 $D$ 为 $H^{s,s'}\to H^{s-1,s'}$ 的映射, 而乘子 $x$ 为 $H^{s,s'}\to H^{s+1,s'-1}$ 的映射.

当 $s'$ 为整数时, 空间 $H^{s,s'}$ 有更直观的性质, 有定理如下:

**定理 4.1.3**　当 $s'=k$ 为正整数时, 空间 $H^{s,s'}$ 可定义为

$$H^{s,k}=\{u\in H^s;\ x^\alpha u\in H^{s+|\alpha|}, \text{当 } |\alpha|\le k\}. \quad (4.1.9)$$

**证明**　$k=0$ 的情形是显然的. 当 $k=1$ 时, (4.1.7)说明对一切 $j$, 有

$$\| 2^{p(s+1)}x_j\phi(2^{-p}D)u\|_0 \le c_p;\ \sum c_p^2<\infty, \quad (4.1.10)$$

$$
\begin{aligned}
x_j\phi(2^{-p}D)u &= x_j\int e^{ix\xi}\phi(2^{-p}\xi)\,\hat{u}\,(\xi)d\xi \\
&= \int (D_{\xi_j}e^{ix\xi})\phi(2^{-p}\xi)\,\hat{u}\,(\xi)d\xi \\
&= \int e^{ix\xi}(D_{\xi_j}\phi(2^{-p}\xi)\cdot 2^p\,\hat{u} \\
&\quad + \phi(2^{-p}\xi)\,\widehat{x_ju}\,(\xi))d\xi \\
&= 2^{-p}(D_j\phi)(2^{-p}D)u + \phi(2^{-p}D)(x_ju).
\end{aligned}
$$

注意，$D_j\phi$ 也是一个支集在环 $\mathscr{C}_0$ 上的 $C^\infty$ 函数，故对 $(D_j\phi)(2^{-p}D)u$ 的估计与 $u_p$ 相仿，因此有

$$
\| 2^{p(s+1)}\phi(2^{-p}D)(x_ju)\|_0 \leq c_p;\quad \sum c_p^2 < \infty, \qquad (4.1.11)
$$

此即 $x_ju \in H^{s+1}$.

反之，若 $u \in H^s$，且对一切 $j$，$x_ju \in H^{s+1}$，则按以上的推导过程逆向论证，即可得知 $u \in H^{s,1}$，从而在 $k=1$ 时证明了(4.1.9)。又当 $k>1$ 时，可用归纳法证明所需的结论. □

**定理 4.1.4** 若 $v$ 是 $R^n\backslash 0$ 中具紧支集的分布，则如下两事实是等价的：

$$
\| \phi(x)v(2^{-j}x)\|_{s+s'} \leq c_j 2^{-j(s-n/2)},\quad \sum c_j^2 < \infty, \qquad (4.1.12)
$$

$$
\begin{cases}
\| T_{pq}^* v\|_0 \leq c_{pq}2^{-qs}2^{-(q-p)s'},\quad \sum\sum c_{pq}^2 < \infty; \\
\| \psi(2^{-q}D)(\phi(2^q x)v(x))\|_0 \leq c_q' 2^{-qs},\quad \sum c_q'^2 < \infty.
\end{cases}
\qquad (4.1.13)
$$

**证明** 由(4.1.13)的第一式知

$$
\| \phi(2^{-q}D)\phi(2^p x)v2^{ps'}\|_0 \leq c_{pq}2^{-q(s+s')}.
$$

结合(4.1.13)的第二式知 $\phi(2^p x)v(x)2^{-ps'} \in H^{s+s'}$，且

$$
\| \phi(2^p x)v2^{-ps'}\|_{s+s'}^2 \leq \sum_q (c_{pq})^2.
$$

令 $2^p x = y$，可得(4.1.12)式. 由(4.1.12)推导(4.1.13)也可仿照定理 4.1.3 的证明进行之.□

如果 $v$ 是 $R^n\backslash 0$ 中具紧支集的分布，又满足(4.1.12)式，则称 $v$ 属于 $Sp(s, s')$ 空间，它是不同于 $H^{s,s'}$ 的另一类具双指标的 Sobolev 空间. 与 $H^{s,s'}$ 空间的情形相仿，也能断定在 $s \leq s_1$，$s + s' \leq s_1 + s'_1$ 时 $Sp(s, s') \supseteq Sp(s_1, s'_1)$.

**定理 4.1.5** 当 $s + s'$ 为正整数时，(4.1.12)等价于

$$|x|^{-s+|\lambda|}D^\lambda v \in L^2, \text{ 若 } 0 \leq |\lambda| \leq s + s'. \quad (4.1.14)$$

**证明** 在(4.1.12)成立，且 $s + s'$ 为正整数时，只要 $0 \leq |\lambda| \leqslant s + s'$，就有

$$\left(\int |D^{s+s'-\lambda}\phi D^\lambda v(2^{-j}x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_j 2^{-j(s-n/2)},$$

故在 $0 \leq |\lambda| \leq s + s'$ 时，

$$\left(\int |\phi_1(x)|x|^{|\lambda|-s} \cdot 2^{-|\lambda|j}(D^\lambda v)(2^{-j}x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_j 2^{-j(s-n/2)},$$

其中 $\phi_1(x)$ 也是一个支集含于某个环中的 $C^\infty$ 函数. 作变换 $x = 2^j y$，即有

$$\int |\phi_1(2^j y)(2^j y)^{s-|\lambda|}|y|^{-s+\lambda}(D^\lambda v)(y)|^2 dy \leq c_j^2.$$

然后关于 $j$ 作和，并注意 $R^n_y$ 中每一点仅被有限个 $\phi_1(2^j y)$ 的支集所覆盖，即得(4.1.14). 反之，若(4.1.14)成立，利用 Leibniz 法则，只需逐项计算 $\| D^{s+s'-\lambda}\phi(x)D^\lambda(v(2^{-j}x)) \|_0$. 作变换 $x = 2^j y$，即知该项被 $\| \phi_1(2^j y)2^{j(s-n/2)}(D^\lambda v)(y)y^{\lambda-s} \|_0$ 所控制. 从而有(4.1.12).□

利用算子(4.1.2)可以定义重二进分解的部分和算子 $\Pi$ 与 $P$ 为：

$$\Pi u = \sum_{p\leq q} T_{pq}u = \sum_{p\leq q}\phi(2^p x)\phi(2^{-q}D)u, \quad (4.1.15)$$

$$Pv = \sum_{p \leq q} T^{*}_{pq} v = \sum_{p \leq q} \phi(2^{-q}D)\phi(2^{p}x)v. \qquad (4.1.16)$$

进而可以利用这两个算子建立空间 $H^{s,s'}$ 与 $Sp(s, s')$ 间的关系，即有如下定理：

**定理 4.1.6** 若 $s \geq 0$, $s + s' \geq 0$, 则有

(1) $Sp(s, s') \subset H^{s,s'}$, $Sp(s, s') \cap H^{s,\infty} = Sp(s, \infty)$;

(2) $\Pi : H^{s,s'} \to Sp(s, s')$;

(3) $P : Sp(s, s') \to H^{s,s'}$.

**证明** 利用插值空间的方法，只需对 $s$ 与 $s+s'$ 为正整数的情形进行证明.

(1) 当 $s' \geq 0$ 时，$u \in H^{s,s'}$ 等价于

$$x^{\mu}D^{\lambda}u \in L^2, \text{若 } \lambda \leq s + s', \ |\mu| \geq \sup(0, |\lambda| - s).$$

而 $u \in Sp(s, s')$ 等价于对 $|\mu| \geq |\lambda| - s$ 有同样的上述性质.

现在考虑 $s' < 0$ 的情形：以 $k$ 记正整数，$u \in H^{s,-k}$ 的充要条件是：$u$ 可写成

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} x^{\alpha} v_{\alpha}, \text{ 其中 } v_{\alpha} \in H^{s-|\alpha|}. \qquad (4.1.17)$$

今若 $u \in Sp(s, -k)$，则 $u$ 可以写成

$$u = |x|^{-2k}\left(\sum x_j^2\right)^k u = \sum_{|\alpha|=k}\sum_{|\beta|=k} C_{\alpha\beta}x^{\alpha}\frac{x^{\beta}u(x)}{|x|^{2k}}. \qquad (4.1.18)$$

由 $u$ 的性质知 $|x|^{-2k}x^{\beta}u(x) \in Sp(s-k, 0)$，故由(4.1.14)知 $u \in H^{s,-k}$.

(2) 利用定理 4.1.1，并注意到二进分解中重复度有限的性质可知 $\Pi$ 是 $L^2$ 到 $L^2$ 的有界算子. 现证 $\Pi$ 将 $H^{1,-1}$ 映射到 $Sp(1, -1)$，将 $H^{0,1}$ 映射到 $Sp(0, 1)$，则一般情形可以由归纳法推得.

若 $u \in H^{1,-1}$，则它可写成 $u_0 + \Sigma x_i u_i$，其中 $u_0 \in H^1$，$u_i \in L^2$，故我们有

$$\frac{1}{|x|}\Pi u = \left(\sum 2^{p-q}\frac{\phi(2^p x)}{2^p|x|}\frac{\phi(2^{-q}D)}{2^{-q}|D|}\right)|D|u_0$$

$$+\left(\sum\frac{2^p x_i\phi(2^p x)}{2^p|x|}\phi(2^{-q}D)\right)u,$$

$$+\left(\sum 2^{p-q}\frac{\phi(2^p x)}{2^p|x|}\phi'_i(2^{-q}D)\right)u_i,$$

括号中的算子都是 $L^2$ 空间上的有界算子，于是，由重复度有限的性质知 $|x|^{-1}\Pi u\in L^2$，即 $u\in Sp(1,-1)$.

若 $u\in H^{0,1}$，由(1)中的讨论知 $u\in Sp(0,1)$，所以 $u$ 与 $x_kD_ju$ 属于 $L^2$. 故由 $x_kD_j\Pi u=[x_kD_j,\Pi]u+\Pi(x_kD_j)u$ 知，我们只需证明$[x_kD_j,\Pi]$是 $L^2$ 中的有界算子. 注意到

$$[x_kD_j,\Pi]=\sum(2^p x_k)\phi'_j(2^p x)\phi(2^{-q}D)$$

$$+\sum\phi(2^p x)(2^{-q}D_j)\phi'_k(2^{-q}D),$$

其中 $\phi'_j$ 是与 $\phi$ 相仿的支集在一个环形区域上的 $C^\infty$ 函数. 由此，再利用定理 4.1.1 即得所需的结论.

(3)这一结论的证明与(2)相仿. 首先，由定理 4.1.1 知 $P$ 是 $L^2$ 上的有界算子. 现设 $u\in Sp(1,-1)$，则有

$$Pu=\sum_i x_i\left(\sum\phi(2^{-q}D)\phi(2^p x)\right)\frac{x_iu}{|x|^2}$$

$$+\sum_i\left(\sum 2^{-q}\phi'_i(2^{-q}D)\phi(2^p x)\right)\frac{x_iu}{|x|^2},$$

其中第一项是 $x_i$ 与 $L^2$ 函数的乘积，而因为第二项的导数可以写成如下的 $L^2$ 函数：

$$\sum\left(\sum(2^{-q}D_j)\phi'_i(2^{-q}D)\phi(2^p x)\right)\frac{x_iu}{|x|^2},$$

故第二项属于 $H^1$，所以 $Pu\in H^{1,-1}$.

现在设 $u\in Sp(0,1)=H^{0,1}$，于是可证 $[x_kD_j,P]$ 在 $L^2$ 中有界，所以 $Pu\in H^{0,1}$. □

为进一步讨论算子 $\Pi$ 与 $P$ 的性质，先证明一个引理如下：

**引理 4.1.1** 设 $\psi_1$ 是具有紧支集的 $C^\infty$ 函数，$\phi_1$ 是支集在环 $\mathscr{C}_0$ 中的 $C^\infty$ 函数，则算子

$$E_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \psi_1(2^p x)\phi_1(2^{-p}D),$$

$$F_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_1(2^{-p}D)\psi_1(2^p x)$$

是 $L^2$ 上的线性有界算子.

**证明** 记
$$T_p = \psi_1(2^p x)\phi_1(2^{-p}D),$$
$$T_p^* = \phi_1(2^{-p}D)\psi_1(2^p x),$$

以下考察 $E_1^* E_1 = (\Sigma T_p)(\Sigma T_p^*)$ 中的诸项：显然，在 $|q-p|$ 大于某个常数 $N_0$ 时，$T_p T_q^* = 0$，故 $E_1^* E_1$ 即相当于单重和式，其中每个指标对应的项数不超过 $N_0$，从而易得 $E_1$ 为 $L^2$ 上的线性有界算子.

为考察 $F_1^* F_1$，我们要证明 $\| T_p^* T_q \| \leq C 2^{-|p-q|}$. 为此只需分别讨论 $\phi_1(0) = 0$ 与 $\hat{\phi}_1$ 的支集充分小这两种特殊情形. 事实上，若 $\theta(\xi)$ 为支集充分小而在原点非零的 $C^\infty$ 函数，则可以找到一个常数 $\alpha$，使 $\phi_1 - \alpha\,\theta(D)\phi_1$ 在原点取零值.

对于第一种情形，$\widehat{T_p u}$ 的支集含于比 $\mathscr{C}_p$ 稍大一些的环内，故在 $|p-q|$ 大于某个 $N_0$ 时，$\langle T_p u, T_q v\rangle = 0$，从而在 $|p-q| \geq N_0$ 时，$T_p^* T_q = 0$.

对于第二种情形，在 $q \geq p$ 时，

$$T_p^* T_q = \phi_1(2^{-p}D)\psi_1(2^p x)\psi_1(2^q x)\phi_1(2^{-q}D).$$

由于

$$|\psi_1(2^p x)\psi_1(2^q x)| \leq C 2^p |x| \| \psi_1(2^q x)|$$

$$\leq C 2^{p-q} |2^q x \psi_1(2^q x)| \leq C' 2^{p-q},$$

所以有 $\| T_p^* T_q \| \leq C' 2^{p-q}$. 这样，由前面的说明知 $F_1$ 为 $L^2$ 上的有界算子. □

**定理 4.1.7** 记 $E = I - \Pi$，$F = I - P$，则 $E$ 为 $H^{s,s'} \to H^{s,\infty}$ 算子，而 $F$ 为 $Sp(s, s') \to H^{s,\infty}$ 算子.

**证明** 我们有

$$E = I - \Pi = \sum \psi(2^p x)\phi(2^{-p} D),$$

且 $x^\alpha D^\beta E$ 在 $|\alpha| = |\beta|$ 时，也具有引理 4.1.1 中所示的算子 $E_1$ 的形式. 例如

$$x_k D_j E = \sum (2^p x_k)\psi(2^p x)(2^{-p} D_j)(\phi(2^{-p} D) + \sum (2^p x_k)\psi'_j(2^p x)\phi(2^{-p} D).$$

在引理 4.1.1 中已证明了 $E_1$ 是 $L^2$ 到 $L^2$ 的映射. 现证它是 $H^{s,-s}$ 到 $H^{s,-s}$ 与 $Sp(s, -s)$ 到 $Sp(s, -s)$ 的映射. 若 $u \in H^{1,-1}$，则 $u = u_0 + \Sigma x_i u_i$，其中 $u_0 \in H^1$，$u_i \in L^2$. 由于

$$D_j E_1 u_0 = E_1 D_j u_0 + \left( \sum \psi'_{1,j}(2^p x) \frac{\phi_1(2^{-p} D)}{2^{-p}|D|} \right)(|D| u_0),$$

故 $E_1 u_0 \in H^1$. 同样可证 $E_1(x_i u_i)$ 可以写成 $H^1$ 函数与 $x_i$ 乘以 $L^2$ 函数之和的形式，所以 $E_1 \in H^{1,-1}$. 对于 $s > 1$ 的情形，可以用归纳法和插值定理证明.

由于对一切 $|\alpha| = |\beta|$ 有 $x^\alpha D^\beta Eu \in H^{s,-s}$，故 $Eu \in H^{s,\infty}$，所以 $E$ 实现了从 $H^{s,s'}$ 到 $H^{s,\infty}$ 的映射.

对于算子 $F$ 的讨论是完全相仿的. □

**定理 4.1.8** 对于任意实数 $s$、$s'$，我们有：

(1) $\Pi$ 将 $H^{s,s'}$ 映射到 $Sp(s, s')$；

(2) $P$ 将 $Sp(s, s')$ 映射到 $H^{s,s'}$；

(3) $I - \Pi \circ P$ 将 $Sp(s, s')$ 映射到 $Sp(s, \infty)$；

(4) $I - P \circ \Pi$ 将 $H^{s,s'}$ 映射到 $H^{s,\infty}$.

**证明** 由定理 4.1.6 知，当 $s \geq 0$，$s' \geq 0$ 时，$\Pi$ 将 $H^{s,s'}$ 映射到 $Sp(s, s')$，而 $P = \Pi^*$ 将 $Sp(-s, -s')$ 映射到 $H^{-s,-s'}$. 同样，$P$ 将 $Sp(s, s')$ 映射到 $H^{s,s'}$，而 $\Pi = P^*$ 将 $H^{-s,-s'}$ 映射到

$Sp(-s, -s')$. 于是,利用插值定理可得 (1) 与 (2) 中的结论.

为证(3),先设 $s \geq 0$, $s' \geq 0$, 故有

$$(I - \Pi \circ P)u = E \circ Pu + Fu. \qquad (4.1.19)$$

若 $u \in Sp(s, s')$,我们有 $Pu \in H^{s,s'}$, $E \circ Pu \in H^{s,\infty}$, $Fu \in H^{s,\infty}$,所以$(I - \Pi \circ P)u \in H^{s,\infty}$. 此外,$(I - \Pi \circ P)u \in Sp(s, s')$ 是显然的,故利用定理 4.1.6 的结论(1),可知 $(I - \Pi \circ P)u \in Sp(s, \infty)$.

另一方面, $(I - P \circ \Pi)u = F \circ \Pi u + Eu$,故对 $u \in H^{s,s'}$, 我们有 $\Pi u \in Sp(s, s')$, $F \circ \Pi u \in H^{s,\infty}$, $Eu \in H^{s,\infty}$, 从而 $(I - P \circ \Pi)u \in H^{s,\infty}$.

对于一般的 $s \in R$,取 $a \geq |s|$,则 $I - Pf \circ \Pi$ 将 $Sp(s+a, 0)$ 映射到 $Sp(s + a, 2N)$, 且它作为 $I - \Pi \circ \mathbf{P}$ 的共轭算子,将 $Sp(s - a, -2N)$ 映射到 $Sp(s - a, 0)$. 由插值定理,可知 $I - P \circ \Pi$ 将 $Sp(s, -N)$ 映射到 $Sp(s, N)$,故得结论(4). 至于结论(3)的证明是相仿的. □

总结以上的讨论,就证得了算子 $\Pi$ 与 $P$ 导出了以下的同构:

$$H^{s,s'}/H^{s,\infty} \xrightarrow{\sim} Sp(s, s')/Sp(s, \infty). \qquad (4.1.20)$$

显然,这个同构并不依赖于在算子 $\Pi$、$P$ 的定义中函数 $\phi$ 的选取.

**定理 4.1.9** 设 $s > \frac{n}{2}$, $s + s' > \frac{n}{2}$, 则

(1) $H^{s,s'}$成一个代数, $Sp(s, s')$是 $H^{s,s'}$ 的理想;

(2) 若 $u_j \in H^{s,s'}$, $F$ 是其变元的 $C^\infty$ 函数,则

$$F(x, u_1(x), \cdots, u_N(x)) \in H^{s,s'}.$$

**证明** 先证(1):已知 $H^s$ 是一个代数,利用归纳法易知,若 $u$、$v$ 满足:对一切 $|\alpha| = |\beta|$, $x^\alpha D^\beta u \in H^s$, $x^\alpha D^\beta v \in H^s$, 则同样的事实对 $uv$ 也成立. 这说明 $H^{s,\infty}$也构成一个代数.

再看空间 $Sp(s, s')$,对于 $Sp(s, s')$的元素,应当满足(4.1.2)

式.当 $u$、$v$ 都满足此式时,由于 $s > \frac{n}{2}$, $s + s' > \frac{n}{2}$, 故

$$\| u(2^{-j}x)v(2^{-j}x) \|_{s+s'} \leq C2^{-j(2s-n)}c_j c'_j$$
$$\leq d_j 2^{-j(s-n/2)},$$

所以 $Sp(s, s')$构成代数.

此外,若 $w \in H^{s,\infty}$,则由于 $s > n/2$, $w(2^{-j}x)$ 及其导数一致有界,所以

$$\| u(2^{-j}x)w(2^{-j}x) \|_{s+s'} \leq Cc_j 2^{-j(s-n/2)},$$

这说明常义下的乘法运算将 $H^{s,\infty} \times Sp(s, s')$ 映射到 $Sp(s, s')$. 利用算子 $E$,可将 $uv$ 写成

$$uv = Eu \cdot Ev + (Eu \cdot \Pi v + \Pi u \cdot Ev + \Pi u \cdot \Pi v). \tag{4.1.21}$$

括号内诸项属于 $Sp(s, s') \subset H^{s,s'}$, 故知 $H^{s,s'}$ 构成代数,且 $Sp(s, s')$是它的理想.

证(2):为简化记号,不妨设 $j = 1$,注意到 $F(Eu(x)) \in H^{s,\infty}$, 令

$$U(x) = F(u(x)) - F(Eu(x)),$$

$$U(2^{-j}x) = G_j(x, \Pi u(2^{-j}x)),$$

其中 $G_j(x, v) = F(Eu(2^{-j}x) + v) - F(Eu(2^{-j}x))$, 则 $G_j(x, v)$是 $C^\infty(C_0 \times R)$ 中的一个有界集,它在 $v = 0$ 时为零,而 $v_j \in H^{s+s'}$. 所以存在常数 $C$,使得

$$\| G_j(x, v_j(x)) \|_{s+s'} \leq C \| v_j \|_{s+s'} \leq Cc_j 2^{-j(s-n/2)}. \tag{4.1.22}$$

这就说明了 $U \in Sp(s, s')$, 从而证得(2). □

**注** 由定理 4.1.9 也容易得到,若 $u$, $v$, $u_1$, …, $u_N$ 属于 $H^{s,s'}$,则在允许相差一个 $Sp(s, \infty)$函数的意义下,有

$$E(uv) = Eu \cdot Ev, \tag{4.1.23}$$

$$E(F(x, u_1(x), \cdots, u_N(x))) = F(x, Eu_1(x), \cdots, Eu_N(x)). \tag{4.1.24}$$

对于任意的 Lagrange 流形 $\Lambda \subset T^*(R^n_x)$，也可以定义具双指标的 Sobolev 空间 $H^{s,s'}_\Lambda$，而在前面所定义的 $H^{s,s'}$ 空间即是 $\Lambda$ 取为 $0 \times R^n_\xi$ 的特例. 进一步还可以通过 Fourier 积分算子来建立 $H^{s,s'}_\Lambda$ 与 $H^{s,s'}$ 间的同构，详见文献[20].

在 $T_\Lambda(T^*(R^n))$ 中的任意元素均可表示为 $(x, \xi; \delta x, \delta\xi)$，其中 $(x, \xi) \in \Lambda$，特别是当 $\Lambda = 0 \times R^n_\xi$ 时，$x = 0$，而 $\xi$ 遍历除原点外的全空间 $R^n_\xi$. 故 $\delta\xi$ 与 $\xi$ 相比常可忽略，甚至可取为零. 这时可以通过一个自然同构将 $(0, \xi; \delta x, 0)$ 对应于 $(\delta x; \xi)$，并在 $R^{2n}$ 空间中 $(\delta x; \xi)$ 的邻域中讨论问题. 如前面所述，这实际上是在一般情形中，在 $(x, \xi; \delta x, \delta\xi)$ 的邻域中讨论问题的特例. 这里以 $(\delta x, \xi)$ 的邻域为基本邻域的分析方法是典型的二次微局部分析的方法，它要比通常的微局部分析更为精细. 由于在这种限制下的分析已足够用于对于讨论奇性三叉干扰问题或更一般的花状奇性结构的研究，故我们在本书中不准备讨论 $\Lambda$ 为一般 Lagrange 流形的情形.

以下，若 $G$ 是 $\delta x$ 的锥邻域，$\Gamma$ 是 $\xi$ 的锥邻域，则称 $G \times \Gamma$ 是 $(\delta x; \xi)$ 的二次微局部邻域，或简记为 $2 - ml$ 邻域.

**定义 4.1.2**　设 $G \times \Gamma$ 是 $(\delta x; \xi)$ 的二次微局部邻域，函数 $\chi(x)$ 和 $h(\xi)$ 为齐零次且除原点外为 $C^\infty$. 又设这两个函数的支集分别含于 $G$ 和 $\Gamma$ 中，且在 $\delta x$ 和 $\xi$ 上不等于零，则当分布 $u$ 满足 $h(D)(\chi u) \in H^{s,s'}$ 时，称 $u$ 在 $(\delta x; \xi)$ 二次微局部地属于 $H^{s,s'}$，简记为 $u \in H^{s,s'}_{2-ml}(\delta x; \xi)$.

显然，若 $u$ 在 $(0, \xi)$ 处微局部地属于 $H^{s,s'}$，则对一切 $\delta x \in S^{n-1}$，在 $(\delta x, \xi)$ 处 $u \in H^{s,s'}_{2-ml}$. 反之，利用有限覆盖定理可知，若对一切 $\delta x \in S^{n-1}$，在 $(\delta x, \xi)$ 处 $u \in H^{s,s'}_{2-ml}$，则 $u$ 在 $(0, \xi)$ 处微局部地属于 $H^{s,s'}$. 对于二次微局部 $H^{s,s'}$ 函数，则有如下定理：

**定理 4.1.10** 设在原点邻域中 $u \in H^{s,-\infty}$，且 $\delta x \in R^n \backslash \{0\}$，则下列两个命题是等价的：

(1) 对任意 $\xi \in R^n \backslash \{0\}$，$u \in H^{s, s'}_{2ml}(\delta x; \xi)$；

(2) 存在 $\delta x_0$ 的一个开锥邻域 $G$ 和原点 $O$ 的邻域 $\omega$，使得

$$\| 2^{ps}(1 + 2p|x|)^{s'}\phi(2^{-p}D)u \|_{L^2(G \cap \omega)} \leq c_p; \ \sum c_p^2 < \infty. \tag{4.1.25}$$

**证明** 利用与算子 $D_j$ 或 $x_j D_k$ 的交换，只须在 $s \geq 0$ 的假定下证明定理，不妨设 $u \in H^{s,\sigma}$，其中 $\sigma$ 也大子零.

设 $g(x)$ 是一个原点外为 $C^\infty$ 的齐零次函数，支集在 $\delta x_0$ 的邻域中，且在 $\delta x_0$ 上为 1，则 $P \circ g \circ \Pi \in Op(\Sigma^{0,0})$，且在 $(\delta x_0; \xi)$ 上为椭圆. 性质(1)等价于在原点邻域中 $P(g \cdot \Pi u) \in H^{s,s'}$.

对 $s \geq 0$，$\sigma \geq 0$，利用定理 4.1.6 可知，在允许相差一个 $H^{s,\infty}$ 函数的意义下

$$\begin{aligned} u &= P(g\Pi u) + P((1-g)\Pi u) \\ &= P(g\Pi u) + (1-g)\Pi u. \end{aligned}$$

现设 $G_0$ 是 $\delta x_0$ 的一个开邻域，$g(x)$ 在 $G_0$ 上恒等子 1. 则由附录中的定理 A.9 可得

$$\| 2^{ps}(1 + 2^p|x|)^N \phi(2^{-p}D)(1-g)\Pi u \|_{L^2(G_0)} \leq c_p; \ \sum c_p^2 < \infty, \tag{4.1.26}$$

故得(4.1.25).

另一方面，(4.1.25)表示 $g(x)\Pi u(x) \in Sp(s, s')$，从而在相差一个 $H^{s,\infty}$ 函数的意义下 $P(g\Pi u) = g\Pi u \in Sp(s, s') \subset H^{s,s'}$. 所以由(2)可推得(1). □

## § 4.2 二次微局部算子

本节讨论二次微局部算子及其运算.

**定义 4.2.1**　若 $a(x,\xi)$ 在 $|x||\xi|>0$ 时为 $C^\infty$ 函数，且满足：

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|\leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\beta|}(1+|x|\cdot|\xi|)^{m'-|\beta|},\tag{4.2.1}$$

则称 $a(x,\xi)$ 为 $\Sigma^{m,m'}$ 象征.

经典拟微分算子的象征类 $S^m_{1,0}$ 属于 $\Sigma^{m,0}$，易见，当 $m\leq l$，$m+m'\leq l+l'$ 时，$\Sigma^{m,m'}\subseteq\Sigma^{l,l'}$. 又当 $a\in\Sigma^{m,m'}$，$b\in\Sigma^{l,l'}$ 时，$ab\in\Sigma^{m+l,m'+l'}$.

**引理 4.2.1**　若 $h(t)$ 为支集在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上的 $C^\infty$ 函数，在 $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$ 上等于 1，则

$$1-h(|x|\cdot|\xi|)\in\Sigma^{0,-\infty},\quad |x|^{-1}(1-h(|x|\cdot|\xi|))\in\Sigma^{1,-1}.$$

又若 $h_1(t)$、$h_2(t)$ 为满足上述性质的函数，$a\in\Sigma^{m,m'}$，则 $a(h_1-h_2)\in\Sigma^{m,-\infty}$.

**证明**　由直接运算知，对任意的 $\alpha$、$\beta$，有

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta h(|x|\cdot|\xi|)|&\leq C|x|^{|-\beta|}|\xi|^{-|\alpha|}\\&\leq C(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}(1+|x\xi|)^{-|\beta|},\end{aligned}$$

由于 $|x\xi|>\dfrac{1}{2}$ 时 $h=0$，故在对 $h$ 而言的(4.2.1)式中 $m=1$，而 $m'$ 可以取为 $-\infty$.

对于 $|x|^{-1}(1-h)$，与 $a(h_1-h_2)$ 的讨论相仿. 这里需注意的是：由于 $h(t)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$ 上等于 1，$|x|^{-1}(1-h)$ 已没有奇性. □

**定义 4.2.2**　设 $\tilde{a}(x,\xi)$ 在 $|x||\xi|>0$ 时属于 $C^\infty$，且满足：

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|\leq C_{\alpha\beta}|x|^{-m+|\alpha|-|\beta|}(1+|x||\xi|)^{m+m'-|\alpha|},\tag{4.2.2}$$

$$\operatorname{supp}\tilde{a}(x,x-y)\subset\{(x,y);\ \kappa^{-1}<|y|/|x|<\kappa\},\ \kappa>1,\tag{4.2.3}$$

其中$\tilde{a}(\cdot, z)$是$a(\cdot, \xi)$关于$\xi$的 Fourier 变换，则称$a(x, \xi)$为$S\Sigma^{m, m'}$象征.

**定理 4.2.1**　设$h(t)$为引理 4.2.1 中述及的$C^\infty$函数，则映射

$$T: a(x, \xi) \longrightarrow (1 - h(|x||\xi|))a(x, \xi) \qquad (4.2.4)$$

可导出如下的同构：

$$S\Sigma^{m, m'}/S\Sigma^{m, -\infty} \xrightarrow{\sim} \Sigma^{m, m'}/\Sigma^{m, -\infty}, \qquad (4.2.5)$$

而且这个同构与$h(t)$的具体取法无关.

**证明**　因为在$|x||\xi| > 1/4$时，(4.2.1)与(4.2.2)等价，故$T$将$S\Sigma^{m, m'}$象征映射成$\Sigma^{m, m'}$象征. 又对于不同的满足上述要求的$h_1$与$h_2$，函数$(h_1(x, \xi) - h_2(x, \xi))a(x, \xi)$同时属于$S\Sigma^{m, \infty}$与$\Sigma^{m, \infty}$，故(4.2.5)是一个单映射.

为证$T$是一个满映射，对于任意的$a \in \Sigma^{m, m'}$，令

$$b(x, \xi) = a(x, \xi)(1 - h(|x||\xi|)),$$

$$c(x, \xi) = \int b\left(x, \xi - \frac{\theta}{|x|}\right) g(\theta) \mathrm{d}\theta,$$

其中$g(\theta)$为$h(|z|)$的 Fourier 逆变换. 由于$c(x, \xi)$关于$\xi$的 Fourier 变换为$\tilde{c}(x, z) = \tilde{b}(x, z) h\left(\frac{|z|}{|x|}\right)$，则象征$c(x, \xi)$满足条件(4.2.3). 为证明(4.2.2)成立，先考虑在区域$\frac{|\theta|}{|x|} \leq \frac{|\xi|}{2}$中对$c$的估计，由于在此区域中$\left|\xi - \frac{\theta}{|x|}\right| \sim |\xi|$，故

$$|c(x, \xi)| \leq C|x|^{-m}(|x||\xi|)^{m+m'}.$$

又在区域$\frac{|\theta|}{|x|} \geq \frac{|\xi|}{2}$中，有

$$\left|\xi - \frac{\theta}{|x|}\right| \leq 3\frac{|\theta|}{|x|},$$

且对任意的$M > 0$有下式成立：

$$g(\theta)b\left(x, \xi-\frac{\theta}{|x|}\right)\leq C|x|^{-m}|\theta|^{m+m'}(1+|\theta|)^{-M},$$

所以在此区域中 $c(x, \xi)$ 可以用 $C|x|^{-m}(1+|x||\xi|)^{-N}$ 来估计，其中 $N$ 是任意大的正整数．用同样的方法可以估计 $c(x, \xi)$ 的导数．

此外，容易证明，当 $a\in\Sigma^{m,-\infty}$ 时，$b\in S\Sigma^{m,-\infty}$．从而即证明了定理．□

在以后的讨论中，凡提及 $S\Sigma^{m,m'}$ 或 $\Sigma^{m,m'}$ 中的元素，都意味着它是 $S\Sigma^{m,m'}/S\Sigma^{m,-\infty}$ 或 $\Sigma^{m,m'}/\Sigma^{m,-\infty}$ 中的代表元素．

对于给定的象征 $a(x, \xi)$，可以按拟微分算子的定义方法定义算子 $A=a(x, D)$ 为

$$Au=\int e^{ix\xi}a(x, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

**定理 4.2.2** 对于一个定义在 $C_0^\infty(R^n\backslash 0)$ 上，且在单位球外为零的算子 $A$，它可写成 $a(x, D)$，且相应的象征 $a(x, \xi)\in S\Sigma^{m,m'}$ 的充分必要条件是

$$A=\sum_{p=0}^{\infty}2^{pm}\Theta_p\mathscr{A}_p\Theta_{-p}, \tag{4.2.6}$$

其中 $\Theta_p$ 是伸缩算子：$\Theta_pu(x)=u(2^px)$，$\mathscr{A}_p$ 是 $m+m'$ 阶的拟微分算子，其象征的支集含于环 $R: \kappa^{-1}\leq|x|\leq 2\kappa$ 中．

**证明** 设 $\phi(x)$ 支集位于环 $R$ 中的 $C^\infty$ 函数，$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\phi(2^px)=1$．若 $\chi<2$，则 $\phi(x)$ 在 $|x|>1$ 时等于零．由于定理条件中已设 $A$ 在单位球外为零，故它可写成 $A=\sum_{p=0}^{\infty}\phi(2^px)a(x, D)$，且每个算子 $\phi(2^px)a(x, D)$ 的象征的支集含于环 $2^{-p}\kappa^{-1}\leq|x|\leq 2^{-(p-1)}\kappa$．于是，记

$$\mathscr{A}_p=2^{-pm}\Theta_{-p}\phi(2^px)a(x, D)\Theta_p, \tag{4.2.7}$$

则算子 $\mathscr{A}_p$ 的象征为

$$\sigma_p(x,\xi) = 2^{-pm}\phi(x)a(2^{-pm}x,\ 2^p\xi), \tag{4.2.8}$$

由 $a(x,\xi)$所满足的估计式(4.2.2)知

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_p(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta}|x|^{-m+|\alpha|-|\beta|}(1+|x|\cdot|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}, \tag{4.2.9}$$

而由$|x|$和$|x|^{-1}$在$\phi(x)$的支集上的有界性可知

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \sigma_p(x,\xi)| \le C'_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}.$$

至于所有 $\sigma_p$ 的支集含于一个固定的环中这一点是明显的.

反之,若 $\mathscr{A}_p$ 是一族以 $\sigma_p$ 为象征且具有定理中所述性质的拟微分算子,令

$$a(x,\xi) = \sum 2^{pm}\sigma_p(2^p x,\ 2^{-p}\xi), \tag{4.2.10}$$

则由于对每个固定的 $x$,和式实际上仅含有限项,故 $a(x,\xi)$为 $C^\infty$ 函数.此外,(4.2.2)、(4.2.3)所示的性质也可通过直接运算验证之.□

**定理 4.2.3** 每个$Op(S\Sigma^{m,m'})$算子 $A$ 将空间 $Sp(s,s')$ 映射到 $Sp(s-m,s'-m')$ 上.

**证明** 因为算子 $A=a(x,D)$ 可以写成(4.2.6)的形式,故对$v\in Sp(s,s')$,有

$$\begin{aligned}
&\|\phi(x)(Av)(2^{-j}x)\|_{s-m+s'-m'} \\
&= \Big\|\sum\phi(x)(2^{pm}\theta_p\mathscr{A}_p\theta_{-p}v)(2^{-j}x)\Big\|_{s-m+s'-m'} \\
&= \Big\|\sum 2^{pm}\phi(x)\mathscr{A}_p\theta_{-p}v(2^{p-j}x)\Big\|_{s-m+s'-m'} \\
&\le \Big\|\sum_{|p-j|\le N}2^{pm}\phi(x)\mathscr{A}_p\theta_{-p}v\Big\|_{s-m+s'-m'} \\
&\le C\sum_{|p-j|\le N}\|2^{pm}\theta_{-p}v\|_{s+s'} \\
&\le c_j 2^{-j(s-m-n/2)},
\end{aligned}$$

其中 $\sum c_j^2 < \infty$. 所以 $Av \in Sp(s-m, s'-m')$. □

记 $M_{x_j}$ 为以 $x_j$ 作为乘子的乘法算子，以 $(ad\ B)A$ 表示交换子 $[B, A]$，则对于 $Op(S\Sigma^{m,m'})$ 类算子与 $M_{x_j}$、$D_j$ 的交换子有如下的定理：

**定理 4.2.4** 对于一个定义在 $C_0^\infty(R^n\backslash 0)$ 上，且在单位球外为零的算子 $A$，它是 $Op(S\Sigma^{m,m'})$ 算子的充分必要条件是：对任意的 $\alpha$、$\beta$，算子 $(ad\ D)^\beta(ad\ M_x)^\alpha A$ 为

$$Sp(s, s') \longrightarrow Sp(s-m-|\beta|+|\alpha|, s'-m'+|\beta|) \tag{4.2.11}$$

的映射.

**证明** 先证必要性：当 $\alpha=\beta=0$ 时，即定理 4.2.3 的结论. 为讨论 $Op(S\Sigma^{m,m'})$ 算子与 $D_j$、$M_{x_j}$ 的交换子的性质，考察算子 $\Theta_p \mathscr{A}_p \Theta_{-p}$ 与它们的交换子，当 $\mathscr{A}_p$ 的象征为 $a_p(x, \xi)$ 时，算子 $\Theta_p \mathscr{A}_p \Theta_{-p}$ 即 $a_p(2^p x, 2^{-p}D)$. 注意到

$$[D_j, a_p(2^p x, 2^{-p}D)] = 2^p a_{pj}(2^p x, 2^{-p}D),$$

$$[x_j, a_p(2^p x, 2^{-p}D)] = 2^{-p} a_p^{(j)}(2^p x, 2^{-p}D),$$

其中 $a_{pj}(x, \xi) = \partial_{x_j} a(x, \xi)$, $a_p^{(j)}(x, \xi) = \partial_{\xi_j} a(x, \xi)$. 当 $a_p(x, \xi)$ 为 $S^{m+m'}$ 类象征时，$a_{pj}$、$a_p^{(j)}$ 分别为 $S^{m+m'}$ 与 $S^{m+m'-1}$ 类象征. 由此，容易推得交换子 $[D_j, A]$ 和 $[M_{x_j}, A]$ 分别为 $Op(S\Sigma^{m+1, m'-1})$ 类算子和 $Op(S\Sigma^{m+1, m'})$ 类算子. 对于一般的 $\alpha$、$\beta$，其证明是类似的.

再证充分性：设 $A$ 是具有所述的交换子性质的算子，则有

$$\| \Theta_p u \|_{Sp(s, s')} \le 2^{p(s-n/2)} \| u \|_{Sp(s, s')}, \tag{4.2.12}$$

$$\| \Theta_{-p} A \Theta_p \| = 2^{pm} \| A \|. \tag{4.2.13}$$

当算子 $A$ 满足定理所述的交换子性质时，算子

$$(ad\ D)^\beta (ad\ M_x)^\alpha (\Theta_{-p} A \Theta_p)$$

是从 $Sp(s,\ s')$ 到 $Sp(s-m,\ s'-m')$ 的有界映射，其模为 $C2^{pm}$ 所控制.

今作 $\mathscr{A}_p = 2^{-pm}\Theta_{-p}A\Theta_p\phi(x)$，它是从 $C^\infty(R^n\backslash 0)$ 到其自身的映射，它的分布核的支集在 $\{(x,\ y);$ 其中 $k^{-1}\le y\le 2k,\ |x|\le 2^p\}$ 上. 为考察算子 $\mathscr{A}_p$ 的象征，令 $\sigma_p(x,\ \xi) = e^{-ix\xi}\mathscr{A}_p(e^{ix\xi})$. 由 (4.2.13) 知，对任意的 $s$ 有下式成立：

$$\|\sigma_p(x,\ \xi)e^{ix\xi}\|_{Sp(s,\ s')} \le C\|\phi(x)e^{ix\xi}\|_{Sp(s+m,\ s'+m')}$$

$$\le C'\|\phi(x)e^{ix\xi}\|_{m+m'} \le C''(1+|\xi|)^{m+m'}. \quad (4.2.14)$$

由定理 4.1.5 知 $v\in Sp(s,\ s')$ 与 $|x|^{-s}v\in L^2$ 等价，故

$$\|\,|x|^{-s}\sigma_p(x,\ \xi)\|_0 \le C''(1+|\xi|)^{m+m'},$$

利用同样的方式，可证得

$$\|\,|x|^{-s}\partial_\xi^\alpha D_x^\beta\sigma_p(x,\ \xi)\|_0 \le C_{s,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}.$$

并由 Sobolev 嵌入定理知

$$\sup_x|\,|x|^{-s}\sigma_p(x,\ \xi)| \le C_{s,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}. \quad (4.2.15)$$

于是，所得到的算子 $\mathscr{A}_p$ 是一簇一致有界的 $m+m'$ 阶拟微分算子，故 $A\in Op(S\Sigma^{m,-\infty})$. □

**注 1**　我们在此指出，在算子 $\mathscr{A}_p$ 的对应中所引入的函数 $\phi$ 不起本质的作用. 不同的函数 $\phi$ 所导致的差只是一个 $Op(S\Sigma^{m,-\infty})$ 算子. 此外也容易看到，一个 $Op(S\Sigma^{m,-\infty})$ 算子是 $Sp(s,\ s')$ 到 $Sp(s,\ \infty)$ 的映射. 反之，若算子 $A$ 是 $Sp(s,\ s')$ 到 $Sp(s,\ \infty)$ 的映射，则由于 $A$ 与 $M_{x_j}$ 或 $D_j$ 的交换子也是 $Sp(s,\ s')$ 到 $Sp(s,\ \infty)$ 的映射，故 $A\in Op(S\Sigma^{m,-\infty})$.

**注 2**　如同拟微分算子的象征运算规则一样，在此也可引入 $S\Sigma^{m,m'}$ 类象征的运算规则

$$a(x,\xi)\longrightarrow(a^*)(x,\xi)=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\bar{a}(x,\xi),$$

$$(a(x,\xi),b(x,\xi))\longrightarrow(a\# b)(x,\xi)$$

$$=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\cdot D_x^\alpha b(x,\xi),$$

并按此运算建立象征所构成的双指标代数 $S\Sigma^{m,m'}/S\Sigma^{m,-\infty}$ 与算子所构成的双指标代数 $Op(S\Sigma^{m,m'})/Op(S\Sigma^{m,-\infty})$ 之间的同构.

在上面讨论的基础上,现在还可以用交换子关系来定义 $Op(\Sigma^{m,m'})$ 类算子.

**定义 4.2.3**　若线性算子 $A$ 在单位球外为零,对一切的 $\alpha$、$\beta$,它使交换子 $(ad\ D)^\beta(ad\ M_x)^\alpha A$ 为 $H^{s,s'}$ 到 $H^{s-m-|\beta|+|\alpha|,s'-m'+|\beta|}$ 的有界映射,则称 $A$ 为 $Op(\Sigma^{m,m'})$ 算子.

我们自然希望能定义 $Op(\Sigma^{m,m'})$ 算子的象征,并希望它的象征就是 $\Sigma^{m,m'}$ 的元素.这将通过 $Op(S\Sigma^{m,m'})$ 算子以及上节中引入的同构映射 $\Pi$、$P$ 来达到.若 $A$ 为按定义 4.2.3 所引入的算子,则 $\tilde{A}=\Pi\circ A\circ P$ 是 $Sp(s,s')$ 到 $Sp(s-m,s'-m')$ 的映射,而且 $\tilde{A}$ 具有定理 4.2.4 中所述的性质.于是 $\tilde{A}\in Op(S\Sigma^{m,m'})$,且由此可对应一个 $S\Sigma^{m,m'}$ 象征 $\tilde{a}(x,\xi)$.由定理 4.2.1 又可对应一个 $\Sigma^{m,m'}$ 象征 $a(x,\xi)$,它即称为**算子 $A$ 的象征**.

**定理 4.2.5**　存在如下的同构对应:

$$Op(\Sigma^{m,m'})/Op(\Sigma^{m,-\infty})$$

$$\xrightarrow{\sim}Op(S\Sigma^{m,m'})/Op(S\Sigma^{m,-\infty})$$

$$\xrightarrow{\sim}S\Sigma^{m,m'}/S\Sigma^{m,-\infty}\xrightarrow{\sim}\Sigma^{m,m'}/\Sigma^{m,-\infty}.\qquad(4.2.16)$$

**证明**　这个定理是前面讨论的总结,其中第一个同构由 $A\to\Pi\circ A\circ P$ 所实现;第二个同构由定理 4.2.3 与定理 4.2.4 所确定(也见其后的注 2);第三个同构由定理 4.2.1 所确定.□

在定理 4.2.5 中所示的由 $Op(\Sigma^{m,m'})$ 算子对应其象征的过程

比较曲折. 下面说明这一对应与常义是一致的.

**定理 4.2.6**　若 $A$ 为经典的具有象征 $a(x, \xi)$ 的 $Op(S^m_{1,0})$ 类拟微分算子,则它也是 $Op(\Sigma^{m,0})$ 类算子,而且按定理 4.2.5 所确定的象征与 $a(x, \xi)$ 仅相差一个 $\Sigma^{m,-\infty}$ 象征.

**证明**　首先, $A$ 将 $H^{s,s'}$ 映射到 $H^{s-m,s'}$. 这在 $s'$ 为正整数时是明显的,而在 $s'$ 为负数及一般实数时,可通过对偶法与插值法来证明. 又易知换位算子 $(adD)^\beta(adM_x)^\alpha P$ 是 $m-|\alpha|$ 阶算子,它将 $H^{s,s'}$ 映射到 $H^{s-m+|\alpha|,s'}\subset H^{s-m+|\alpha|-|\beta|,s'+|\beta|}$. 所以 $A\in Op(\Sigma^{m,0})$.

以下计算 $A$ 的象征. 易见

$$\Pi\circ A\circ P=\sum_{p'\le q'}\sum_{p\le q}\phi(2^p x)\phi(2^{-q}D)A\phi(2^{-q'}D)\phi(2^{p'}x). \tag{4.2.17}$$

在相差一个 $Op(S\Sigma^{m,-\infty})$ 算子的意义下,算子(4.2.17)的分布核的支集在 $\kappa^{-1}\le|x|/|y|\le 2\kappa$ 中. 所以若 $N_0$ 是这样的正整数,它使得在 supp $\phi$ 上 $\sum\limits_{-N_0\le\nu\le N_0}\phi(2^\nu x)=1$, 则只须在(4.2.17)所示的和式中保留使 $|p-p'|\le N_0$ 的项. 于是,

$$\begin{aligned}\Pi\circ A\circ P\simeq\sum_{\nu=-N_0}^{N_0}\sum_p&\phi(2^p x)(1-\psi(2^{-q}D))\\&\times A(1-\psi(2^{-p-\nu}D))\phi(2^{p+\nu}x).\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

该式的右端还可写成

$$\sum\Theta_p\mathscr{A}_p\Theta_{-p}, \tag{4.2.19}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_p=\sum\nolimits_\nu\sum\nolimits_p&\phi(x)(1-\psi(D))\\&\times A(2^{-p}x, 2^pD)(1-\psi(2^{-\nu}D))\phi(2^\nu x).\end{aligned}$$

注意,对较大的 $\xi$ 算子 $\mathscr{A}_p$ 的象征为 $\phi(x)a(2^{-p}x, 2^p\xi)$,故有

$$\mathrm{Sym}(\mathscr{A}_p)=\phi(x)a(2^{-p}x, 2^p\xi)+r_p(x, \xi),$$

其中 $r_p(x, \xi)$ 是 $S_{1,0}^{-N}$ 类象征，$N$ 可以任意大. 因此算子(4.2.19)的象征为 $p(x, \xi) + r(x, \xi)$，其中

$$r(x, \xi) = \sum r_p(2^p x, 2^{-p}\xi) \in S\Sigma^{0, -N}$$

对一切 $N$ 成立. □

最后，我们指出，可以在一个二次微局部邻域中讨论上述算子及相应的象征. 例如，若 $a(x, \xi) \in \Sigma^{m, m'}$ 在 $(\delta x_0; \xi_0)$ 的一个二次微局部邻域中成立，则说 $a(x, D)$ 在 $(\delta x_0; \xi_0)$ 的二次微局部邻域中属于 $Op(\Sigma^{m, m'})$. 又若 $a(x, \xi)$ 在 $(\delta x_0; \xi_0)$ 的二次微局部邻域中不等于零，且满足

$$a(\varepsilon\delta x, \lambda\xi) \geq C\lambda^m (\lambda\varepsilon)^{m'}, \ \forall \varepsilon, \lambda > 0, \qquad (4.2.20)$$

则称 $a(x, D)$ 在 $(\delta x_0; \xi_0)$ 处为*二次微局部椭圆*.

同拟微分算子理论相仿，若 $A = a(x, D)$ 是 $Op(\Sigma^{0, 0})$ 算子，在 $(\delta x_0; \xi_0)$ 处为二次微局部椭圆，则 $u$ 在 $(\delta x_0; \xi_0)$ 处二次微局部地属于 $H^{s, s'}$ 的充分必要条件是：$Au$ 在该点二次微局部地属于 $H^{s, s'}$.

## §4.3 奇性传播与三叉干扰

本节中将应用前面的结果来讨论奇性的三叉干扰问题. 在讨论过程中，需要先给出二次微局部正则性的传播定理.

### 一、二次微局部奇性传播定理

设 $P$ 为一个 $Op(S_{1,0}^m)$ 类拟微分算子，$(0, \xi_0)$ 为其特征点，$\gamma_\pm$ 为算子 $P$ 过该点的次特征，我们考察在该点邻域中以 $P$ 为主项的二次微局部算子的奇性传播定理.

**定理 4.3.1** 设 $P \in Op(S_{1,0}^m)$，其主象征满足 $p_m(0, \xi_0) = 0$，$\nabla_\xi p_m(0, \xi) \neq 0$. 设 $R \in Op(\Sigma^{m, -1})$，且在 $(\pm H_{p_m}(0, \xi_0), \xi_0)$ 的二次微局部邻域 $\pm G \times \Gamma$ 中属于 $Op(\Sigma^{m, -2}) + Op(\Sigma^{m-1, 0})$. 此外，又假定：

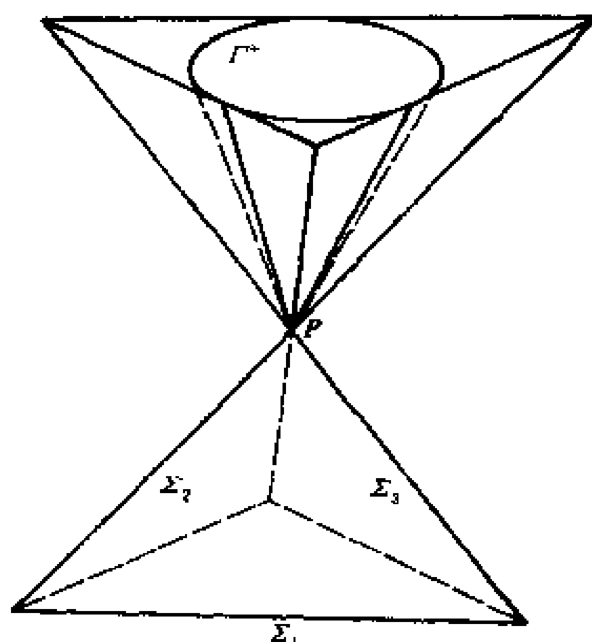



图 4.3.1

(1) 在原点邻域中 $u \in H^{s,-\infty}$;

(2) 在$(0, \xi_0)$邻域中 $(P + R)u \in H^{s-m,\frac{1}{2}}$;

(3) 在 $\gamma_-$的邻域中 $u \in H^{s,\frac{1}{2}}$.

则 $u$ 在$(0, \xi_0)$的邻域属于 $H^{s-\varepsilon,-\frac{1}{2}}$,且在 $\gamma_+$ 上有 $u \in H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}$,其中 $\varepsilon$ 为任意正常数.

回顾在第 2 章中对分布波前集传播的讨论,定理 4.3.1 的条件与结论均与定理 2.2.1 相仿. 但由于涉及双指标的 Sobolev 空间,其叙述变得更复杂,此外,定理 4.3.1 的结果也稍差些,表现为 $u$ 在 $\gamma_+$上的正则性要略低于 $\gamma_-$ 上的正则性.

为证明这个定理需要将算子 $P + R$ 改变形式. 首先对 $P + R$ 乘以一个 $1 - m$ 阶的椭圆算子,从而不妨设定理 4.3.1 中 $m = 1$. 然后,利用椭圆 Fourier 积分算子可以将 $P$ 的主象征变成 $\xi_1$,也就是说,算子 $P + R$ 变成 $D_{x_1} + R_0$的形式,其中 $R_0 \in Op(\Sigma^{1,-1})$,且在$(0, \xi_0)$的二次微局部邻域中 $R_0 \in Op(\Sigma^{1,-2}) + Op(\Sigma^{0,0})$. 然后再设法将算子 $D_{x_1} + R_0$ 化成 $D_{x_1}$的形式. 关于用 Fourier 积分算子对拟微分算子或 $Op(\Sigma^{m,m'})$类算子进行变换的方法这里不作详

述，有兴趣的读者可以参考文献[78]、[108]、[20]等. 下面说明如何通过一个变换将 $D_{x_1}+R_0$ 中的 $R_0$ 消去.

在下面的讨论中，$D_{x_1}+R_0$ 的主象征为 $\xi_1$，$G$ 为 $(1, 0, \cdots, 0)$ 的一个锥邻域. $\gamma_+(\gamma_-)$ 在底空间上的投影为 $x_1$ 轴的正(负)部分.

**引理 4.3.1** 设 $R_0 \in Op(\Sigma^{1,-1})$，又在 $(\pm G)\times\Gamma$ 中 $R_0 \in Op(\Sigma^{1,-2}) + Op(\Sigma^{0,0})$，则对任意的 $N>0$，任意锥 $G_0 \in R^n_x$，必有在 $G_0\times\Gamma$ 中为椭圆的算子 $E\in Op(\Sigma^{0,0})$ 使得在这个二次微局部邻域中有

$$E\circ(D_{x_1}+R_0) - D_{x_1}\circ E \in Op(\Sigma^{1,-N}). \qquad (4.3.1)$$

**证明** 分别考虑以下两种不同的情况：

(1) $G_0$ 为 $(\pm 1, 0, \cdots, 0)$ 的锥邻域. 例如设 $G_0$ 含于 $G$ 中，将 $E$ 的象征写成 $e_0+e_1+\cdots e_N$，其中 $e_j\in\Sigma^{0,-j}$，以下设法来决定各个 $e_j$，由象征运算知，$e_j$ 应满足

$$\frac{\partial e_0}{\partial x_1} + re_0 = 0, \quad \frac{\partial e_j}{\partial x_1} + re_j = s_j, \qquad (4.3.2)$$

其中 $s_j$ 由 $e_0, \cdots, e_{j-1}$ 所决定. 首先，由(4.3.2)知

$$e_0 = \exp\left(\int_{x_1}^{a} r(t, x', \xi)\mathrm{d}t\right), \qquad (4.3.3)$$

而被积函数满足

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, x'\xi)| \leq C\frac{|\xi|^{-|\alpha|+|\beta|}}{(1+t|\xi|)^{|\beta|}} + C\frac{|\xi|^{1-|\alpha|+|\beta|}}{(1+t|\xi|)^{2+|\beta|}},$$

故易得(4.3.3)中的积分属于 $\Sigma^{0,0}$，从而 $e_0$ 本身属于 $\Sigma^{0,0}$.

归纳起来，当我们知道了在 $l\leq j-1$ 时 $e_l\in\Sigma^{0,-l}$ 后，在(4.3.2)中的 $s_j$ 就是 $\Sigma^{1,-j-1}$ 类象征，用同样方法可得 $e_j\in\Sigma^{0,-j}$.

(2) $G_0$ 不含 $(\pm 1, 0, \cdots, 0)$，则在 $G_0$ 中 $|x_1|<|x'|$. 不妨设 $G_0$ 可以用 $x'\in G'_0$，$(c-\varepsilon)|x'|<x_1<(c+\varepsilon)|x'|$ 来定义，则

(4.3.2)的解可以写成

$$e_0(x_1, x', \xi) = \exp\left(-\int_{\varepsilon|x'|}^{x_1} r(t, x'\xi)\mathrm{d}t\right). \qquad (4.3.4)$$

由估计式

$$|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, x', \xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|-|\beta|}(1+|x'||\xi|)^{-1-|\beta|}$$

可以得到(4.3.4)式中的积分属于 $\Sigma^{0,0}$，从而 $e_0$ 本身属于 $\Sigma^{0,0}$. 接着，用同样的方法可推知 $e_j \in \Sigma^{0,-j}$.

根据 $E$ 的象征的决定方式，算子 $E$ 满足(4.3.1)是显然的. □

结合这个引理中所作的化简，为证明定理 4.3.1，只须讨论 $P = D_{x_1}$, $R = 0$ 的情形. 于是只须证明如下的定理：

**定理 4.3.2**　设在原点的邻域中 $u \in H^{s,-\infty}$，在 $(0, \xi_0)$ 的邻域中 $D_{x_1}u \in H^{s-1,\frac{1}{2}}$ 微局部地成立，又沿着 $\gamma_-$ 微局部地有 $u \in H^{s-\frac{1}{2}}$，则在 $(0, \xi_0)$ 的邻域中对任意的 $\varepsilon > 0$ 有 $u \in H^{s-\varepsilon,-\frac{1}{2}}$，且 $u \in H^{s-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 沿着 $\gamma_+$ 成立.

此定理的证明依赖于以下三个引理：

**引理 4.3.2(在进入次特征上的传播)**　以 $\delta x_0$ 记 $(1, 0, \cdots, 0)$，设对 $s' > -\dfrac{1}{2}$，$D_{x_1}u \in H^{s-1,s'+1}$ 在 $(-\delta x_0; \xi_0)$ 二次微局部地成立，且对 $\tau > 0$，$u \in H^{s+s'}$ 在 $(-\tau, 0, \cdots, 0, \xi_0)$ 微局部地成立，则 $u \in H^{s,s'}$ 在 $(-\delta x_0; \xi_0)$ 二次微局部地成立.

**引理 4.3.3(沿着 2-次特征的传播)**　设对 $\nu \in S^{n-2}$，$\varepsilon > 0$，$-1 \leq c \leq 1$，$D_{x_1}u \in H^{s-1,s'+1}$ 在 $(c, \varepsilon\nu; \xi_0)$ 二次微局部地成立，$u \in H^{s,s'}$ 在 $(-1, \varepsilon\nu; \xi_0)$ 二次微局部地成立，则对一切 $c \in [-1, 1]$，$u \in H^{s,s'}$ 在 $(c, \varepsilon\nu; \xi_0)$ 二次微局部地成立.

**引理 4.3.4(在离去次特征上的传播)**　设对 $s' < -\dfrac{1}{2}$，当 $\delta x_0 \in G$ 时 $D_{x_1}u \in H^{s-1,s'+1}$ 在 $(\delta x_0, \xi_0)$ 二次微局部地成立，又当 $\nu \in S^{n-2}$，$\varepsilon > 0$ 很小时，$u \in H^{s,s'}$ 在 $(1, \varepsilon\nu; \xi_0)$ 二次微局部地成立，则 $u \in H^{s,s'}$ 在 $(\tau, 0, \cdots, 0; \xi_0)$ 处二次微局部地成立. 特别是

在$(\delta, 0, \cdots, 0, \xi_0)$点 $u \in H^{s+s'}$ 微局部地成立.

**定理 4.3.2 的证明** 有了上述三个引理,定理 4.3.2 可以很快地被证明. 事实上,记该定理中的 $s$ 为 $s_0$,取 $s = s_0 - \varepsilon$, $s' = -\dfrac{1}{2} + \varepsilon$, 其中 $\varepsilon$ 为任意小的正数,则由引理 4.3.2 知

$$u \in H^{s_0-\varepsilon, -\frac{1}{2}+\varepsilon} \text{ 在}(-\delta x_0, \xi_0)\text{二次微局部地成立.}$$

于是,在这点的二次微局部邻域中,$u$ 也有这样的二次微局部正则性. 由引理 4.3.3,可以将命题

$$\text{“}u \in H^{s_0-\varepsilon, -\frac{1}{2}+\varepsilon} \text{ 在}(c, \varepsilon\nu, \xi_0)\text{二次微局部地成立”}$$

从 $c = -1$ 成立推进到 $c = 1$ 成立. 最后为了应用引理 4.3.4,需将 $s'$ 取成 $-\dfrac{1}{2} - \varepsilon$, 从而得到

$$u \in H^{s_0-\varepsilon, -\frac{1}{2}-\varepsilon} \text{ 在}(1, 0, \cdots, 0; \xi_0)\text{二次微局部地成立,}$$

且 $u \in H^{s_0-2\varepsilon}$ 在$(\delta x_0, \xi_0)$点微局部地成立. 这样,函数 $u$ 的微局部正则性就从 $\gamma_-$ 越过原点传播到 $\gamma_+$ 上. 但是,其正则性的阶减少了 $2\varepsilon$ (它与 $\varepsilon$ 一样,为一个任意小的正数). □

**引理 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4 的证明** 这几个引理的证明方法相仿,都是利用定理 4.1.10 将函数 $u$ 的微局部正则性化成一个积分的估计. 在证明中要用到经典的 Hardy 不等式

$$\left\| (\varepsilon + t)^{\alpha-1} \int_t^\infty (\varepsilon + s)^{-\alpha} f(s) \mathrm{d}s \right\|_{L^2(R^+)} \leq C(\alpha) \| f \|_{L^2(R^+)}, \tag{4.3.5}$$

其中 $\alpha > \dfrac{1}{2}$, 以及

$$\left\| (\varepsilon + t)^{-\alpha-1} \int_0^t (\varepsilon + s)^{\alpha} f(s) \mathrm{d}s \right\|_{L^2(R^+)} \leq C(\alpha) \| f \|_{L^2(R^+)}, \tag{4.3.6}$$

其中　$\alpha > -\dfrac{1}{2}$.

为证明引理 4.3.2，记 $w = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \in H^{s-1, s'+1}$，令 $u_p = \phi(2^{-p}D)u$，由于在 $-\delta x_0$ 的邻域 $G$ 中 $|x_1| \sim |x|$，则有

$$u_p(x) = \int_{-\infty}^{x_1} w_p(t, x')\mathrm{d}t,$$

$$\| 2^{p(s-1)}(1 + 2^p |x_1|)^{s'+1} w_p(x) \|_{L^2(G)} \leqslant c_p; \quad \sum c_p^2 < \infty. \tag{4.3.7}$$

利用(4.3.5)，并取

$$\varepsilon = 2^{-p}, \ \alpha = s' + 1, \ f(t) = (\varepsilon + t)^{s'+1} w_p(-t, x'),$$

可得估计

$$\| 2^{ps}(1 + 2^p |x_1|)^{s'} u_p(x) \|_{L^2(G)} \leq d_p; \quad \sum d_p^2 < \infty. \tag{4.3.8}$$

由定理 4.1.10 即得 $u \in H^{s, s'}$ 在$(-\delta x_0; \xi_0)$二次微局部地成立.

为证明引理 4.3.3，对方向 $\nu$ 在 $R_{x'}^{n-1}$ 中的锥邻域 $G_0'$，作

$$G_0 = \{(\delta x_1, \delta x'); \delta x' \in G_0', \alpha|\delta x'| \leq \delta x_1 < \beta|\delta x'|\},$$

$$G_1 = \{(\delta x_1, \delta x'); \delta x' \in G_0', \alpha_1|\delta x'| \leq \delta x_1 < \beta_1|\delta x'|\},$$

其中 $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. 由引理 4.3.3 的条件与定理 4.1.10，可知

$$\left\| 2^{p(s-1)}(1 + 2^p |x'|)^{s'+1} \frac{\partial u_p}{\partial x_1} \right\|_{L^2(G_0)} \leq c_p; \quad \sum c_p^2 < \infty, \tag{4.3.9}$$

$$\| 2^{ps}(1 + 2^p |x'|)^{s'} u_p \|_{L^2(G_1)} \leq d_p; \quad \sum d_p^2 < \infty. \tag{4.3.10}$$

利用 Hardy 不等式，并结合(4.3.9)式，就可以将(4.3.10)中的积分区域 $G_1$ 扩大到 $G_0$，所以 $u \in H^{s, s'}$ 成立的区域可以与 $\partial u/\partial x_1 \in$

$H^{s-1,s'-1}$ 的区域一致，从而得引理 4.3.3 的结论.

为证引理 4.3.4，以 $\tilde{G}$ 记(1, 0, …, 0)的小锥邻域，则引理的条件说明

$$\left\|2^{p(s-1)}(1+2^p|x_1|)^{s'-1}\frac{\partial u_p}{\partial x_1}\right\|_{L^2(G)}\leq c_p,\ \sum c_p^2<\infty, \tag{4.3.11}$$

$$\| 2^{ps}(1+2^p|x_1|)^{s'}u_p\|_{L^2(G\setminus\tilde{G})}\leq d_p,\ \sum d_p^2<\infty. \tag{4.3.12}$$

令 $h(t)$ 是在原点附近为零、在 $t>1$ 等于 1 的 $C^\infty$ 函数，取 $h_p(x)=h(2^px_1)$；令 $\chi(x)$ 是在 $\tilde{G}$ 上为 1，支集在 $G$ 中的齐零次函数，它在原点外为 $C^\infty$，则有

$$\left\|2^{p(s-1)}(1+2^p|x_1|)^{s'+1}\frac{\partial}{\partial x_1}(\chi h_p u_p)\right\|_{L^2(G)}\leq c'_p,$$

$$\sum c'^2_p<\infty. \tag{4.3.13}$$

利用 Hardy 不等式(4.3.6)，并取 $\varepsilon=2^{-p}$，$\alpha=-s'-1$，以及

$f(t)=(\varepsilon+t)^{s'+1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\chi h_p u_p)(t,x')$，即得

$$\| 2^{ps}(1+2^p|x_1|)^{s'}\chi h_p u_p\|_{L^2(G\setminus\tilde{G})}\leq e_p,\ \sum e_p^2<\infty. \tag{4.3.14}$$

从而得引理中所述的 $u_p$ 的正则性. □

## 二、余法分布空间

在定理 4.3.1 与定理 4.3.2 中所述的奇性传播的结果与定理 2.2.1 相当. 然而在讨论具有花状奇性结构的问题中，用余法分布更能表现奇性分布的特征，因此，以下用类似于第 3 章中的方法，引入相应的余法分布空间，并以此为工具讨论三叉干扰问题.

**定义 4.3.2**　设 $\mathscr{Z}$ 为 $Op(\Sigma^{0,1})$，它的象征在 $\mathrm{mod}\Sigma^{0,-\infty}$ 的意义下等于

$$z(x,\xi)=\sum a_j(x)\xi_j,$$

其中 $|D_x^\alpha a_j(x)|\le C_{j,\alpha}|x|^{1-|\alpha|}$，则称 $\mathscr{Z}$ 为退化向量场.

**定义 4.3.3** 设 $\mathscr{Z}$ 是由 1 和有限个退化向量场 $Z_1,\cdots,Z_m$ 所构成的 Lie 代数(它是 $Op(\Sigma^{0,1})$ 的子代数). 若对于任意的重指标 $I=(i_1,\cdots,i_l)$, $|I|=l\le k$, 有

$$Z_{i_1}\circ\cdots\circ Z_{i_l}u\in H^{s,s'},\tag{4.3.15}$$

则称 $u$ 属于余法分布空间 $H^{s,s'}(\mathscr{Z},k)$.

**定理 4.3.3** 设 $s>\frac{1}{2}$, $s+s'>\frac{n}{2}$，则 $H^{s,s'}(\mathscr{Z},k)$ 成一个代数，而且，若 $F(u_1,\cdots,u_N)$ 是其变元的 $C^\infty$ 函数 $u_1(x),\cdots,u_N(x)$，属于 $H^{s,s'}(\mathscr{Z},k)$，则

$$F(x,u_1(x),\cdots,u_N(x))\in H^{s,s'}(\mathscr{Z},k).\tag{4.3.16}$$

**证明** 先考察 $F$ 为两个函数乘积的形式. 设 $\tilde{Z}$ 是常义的向量场 $\sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$，它与 $Z$ 具有同样的象征，则在相差一个 $Op(\Sigma^{0,-\infty})$ 算子的意义下 $Z=\mathscr{P}\circ\tilde{Z}\circ\Pi$. 如果以记号"$\sim$"表示相差一个 $H^{s,\infty}$ 函数意义下的相等，则根据 $\mathscr{P}$ 与 $\Pi$ 的性质以及 (4.1.23) 式，则有

$$Zu\sim\tilde{Z}\Pi u,$$

$$Z(uv)\sim\tilde{Z}(uv-E(uv))\sim\tilde{Z}(uv-Eu\cdot Ev),$$

从而

$$\begin{aligned}Z(uv)&\sim\tilde{Z}(\Pi u\Pi v+Eu\Pi v+\Pi uEv))\\&\sim\tilde{Z}\Pi u\cdot v+u\cdot\tilde{Z}\Pi v+\tilde{Z}Eu\cdot\Pi v+\tilde{Z}Ev\cdot\Pi u.\end{aligned}\tag{4.3.17}$$

由于函数 $a=\tilde{Z}Eu$ 满足

$$\| |x|^k D^k a(x) \|_s \leq C,$$

而 $s > \frac{n}{2}$，所以 $|D^k a(x)| \leq C|x|^{-k}$，故如果用 $M_2$ 记以 $a$ 为象征的 $Op(\Sigma^{0,0})$算子，$M_2 v = \mathscr{P}(a\Pi v) \sim (\tilde{Z}Eu)\Pi v$. 同样，(4.3.17)右端的最后一项也可写成 $M_1 u$ 的形式，其中 $M_1$ 为 $Op(\Sigma^{0,0})$算子. 于是(4.3.17)可以写成

$$Z(uv) \sim \tilde{Z}\Pi u \cdot v + u \cdot \tilde{Z}\Pi v + M_1 u + M_2 v. \quad (4.3.18)$$

依此方法，还可导出 $Z^k(uv)$的表达式，进而得到 $uv \in H^{s,s'}(\mathscr{Z}, k)$. 对于一般的非线性函数 $F$，也可有类似的公式. 下面不妨设 $n = 1$，则

$$\begin{aligned} ZF(u) &\sim \tilde{Z}\Pi F(u) \sim \tilde{Z}(F(u) - F(Eu)) \\ &\sim \frac{\partial F}{\partial u}(u)\tilde{Z}\Pi u + \tilde{Z}Eu\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u) - \frac{\partial F}{\partial u}(Eu)\right) \\ &\sim \frac{\partial F}{\partial u}Zu + (\tilde{Z}Eu)\left(\Pi\frac{\partial F}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

所以，对于一般的 $F(u_1, \cdots, u_N)$，有

$$ZF(u_1(x), \cdots, u_N(x)) \sim \sum \frac{\partial F}{\partial u_j}(Zu_j) + \sum M'_j\left(\frac{\partial F}{\partial u_j}\right). \quad (4.3.19)$$

利用归纳法，$Z^I F(x, u_1, \cdots, u_N)$可以表示为以 $Z^J u_i$ 为元素的表达式，$|J| \leq |I|$，且在系数中只涉及非线性函数与 $Op(\Sigma^{0,0})$算子，而且所有可能的 $J$ 都满足 $|J| \leq |I|$. 由于 $H^{s,s'}$在非线性复合下不变，且 $Op(\Sigma^{0,0})$算子将 $H^{s,s'}$映射到自身，故

$$Z^I F(x, u_1, \cdots, u_N) \in H^{s,s'}, \text{ 若 } |I| \leq k. \quad (4.3.20)$$

从而得(4.3.16)式. □

## 三、三叉奇性干扰问题

现在转向讨论非线性波动方程

$$\square u = f(t, x, y, u) \tag{4.3.21}$$

的三叉奇性干扰问题.对于给定的特征曲面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$,以及过原点的前向特征锥 $\Gamma^+$,可以定义一个退化向量场空间 $\mathscr{M}$.对于任一元素 $M\in\mathscr{M}$, $M$ 所对应的常义向量场与 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Gamma_+$ 均相切.

退化向量场集合 $\mathscr{M}$ 关于换位运算是封闭的,即由 $M_1$、$M_2\in\mathscr{M}$ 可推知 $[M_1, M_2]\in\mathscr{M}$. 事实上,由于 $\mathscr{M}$ 中的元素在模 $Op(\Sigma^{0,-\infty})$的意义下可以用向量场来表达,所以,对$[M_1, M_2]$,只须考察常义向量场$\sum a_j\frac{\partial}{\partial x_j}$与$\sum b_j\frac{\partial}{\partial x_j}$的换位. 显然

$$\left[\sum a_j\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum b_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right]=\sum c_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{4.3.22}$$

其中 $c_i=\sum\left(a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}-b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$, 它也满足不等式 $|D_j^\alpha c_j(x)|\le C|x|^{1-|\alpha|}$, 故 $[M_1, M_2]$ 为退化向量场. 又若在原点之外局部地以 $\phi=0$ 表示 $\Sigma_i$ 或 $\Gamma$ 中的某个曲面, 则由 $M_1$、$M_2\in\mathscr{M}$ 知 $\sum a_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}=0$, $\sum b_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}=0$, 故

$$\sum c_i\phi_i=\sum_{i,j}\left(a_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_i)\cdot b_i-b_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_i)a_i\right)=0,$$

从而 $[M_1, M_2]\in\mathscr{M}$.

与§3.3、§3.4 中所作的相仿,若从退化向量场集合 $\mathscr{Z}$ 中能选出有限个退化向量场$\{Z_i\}$,使得任一 $Z\in\mathscr{Z}$ 都能写成

$$Z=\sum_i A_iZ_i+A_0, \tag{4.3.23}$$

其中 $A_0$、$A_i$ 都属于 $Op(\Sigma^{0,0})$,则称$\{Z_i\}$为 $\mathscr{Z}$ 的一组基.

**定理 4.3.4** 存在 $\mathscr{M}$ 的一组基,使得如下的交换子关系成立:

$$[\square, M_i]=\Sigma A_{ij}M_j+B_i\square+A_{i0}, \tag{4.3.24}$$

其中 $A_{i0}$、$A_{ij} \in Op(\Sigma^{2,-1})$，$B_i \in Op(\Sigma^{0,0})$，且

$$
\begin{aligned}
&A_{i0},\ A_{ij} \in Op(\Sigma^{2,-2}) + Op(\Sigma^{1,0}), \\
&B_i \in Op(\Sigma^{0,-1}) + Op(\Sigma^{-1,1})
\end{aligned}
\tag{4.3.25}
$$

在 $\tilde{\Gamma}$ 上二次微局部地成立. 这里 $\tilde{\Gamma}$ 由所有满足

$$
\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0,\ -\frac{\delta t}{\tau} = \frac{\delta x}{\xi} = \frac{\delta y}{\eta} \tag{4.3.26}
$$

的点 $(\delta t,\ \delta x,\ \delta y;\ \tau,\ \xi,\ \eta)$ 所构成.

**证明** 首先在每个二次微局部邻域中构造这样的基，然后再通过单位分解的方法加以粘合. 若 $(\delta x;\ \xi) \notin \Gamma$，则 $(\delta x;\ \xi)$ 不会属于 $\tilde{\Gamma}$，故条件(4.3.25)不出现，从而(4.3.24)成立. 若 $\delta x \in \Gamma \backslash (\bigcup \Sigma_j)$，则 $\mathscr{M}$ 在 $\delta x$ 的邻域中可由

$$
\begin{aligned}
\lambda = tD_t + xD_x + yD_y,\ xD_y - yD_x, \\
tD_x + xD_t,\ tD_y + yD_t
\end{aligned}
$$

生成，从而由直接运算知(4.3.25)成立. 又若 $\delta x \in \Gamma \cap \Sigma_j$，则可以在经过一个坐标绕 $t$ 轴的旋转变换后，将 $\Sigma_j$ 变到平面 $t + x = 0$，于是 $\mathscr{M}$ 在 $\delta x$ 的邻域中可由

$$
\lambda,\ xD_t + tD_x,\quad (t + x)D_y + y(D_t - D_x)
$$

生成.

为了由各个邻域中所得到的基导出整体定义的基，作 $R^n_{\delta x} \times R^n_\xi$ 中的单位分解 $1 = \Sigma\chi_{\alpha\beta}(x)h_\alpha(\xi)$，其中 $\chi_{\alpha\beta}(x)$ 与 $h_\alpha(\xi)$ 都是齐零次函数，$h_\alpha$ 的支集在锥 $\gamma_\alpha$ 中，$\chi_{\alpha\beta}$ 的支集在锥 $\omega_{\alpha\beta}$ 中. 作以 $\chi_{\alpha\beta}(x)h_\alpha(\xi)$ 为象征的 $Op(\Sigma^{0,0})$ 算子 $T_{\alpha\beta}$，并在每个相应的二次微局部邻域中，以 $T_{\alpha\beta}M_i$ 代替前面所得到的 $M_i$. 我们希望通过适当的单位分解的选取，使得用上述方法构造的算子集合能得到 $\mathscr{M}$ 的基. 于是，函数 $\chi_{\alpha\beta}$ 与 $h_\alpha(\xi)$ 的选取则是关键.

我们这样来构造 $\chi$ 与 $h$：首先，将每个 $\gamma_\alpha$ 取得充分小，使得它

至多含交线 $\Gamma\cap\Sigma_j$ 中的一个. 若 $\gamma_\alpha$ 含特征方向，则存在 $R^n$ 中的锥 $\pm g_\alpha$，使得由 $(\delta x;\xi)\in\tilde{\Gamma}$ 与 $\xi\in\gamma_\alpha$ 可导致 $\delta x\in\pm g_\alpha$. 函数 $h_\alpha(\xi)$ 可取为支集在 $\gamma_\alpha$ 中的齐零次函数，且在原点外为 $C^\infty$. 对每个 $\alpha$，取在原点外为 $C^\infty$ 的齐零次函数集 $\{\chi_{\alpha\beta}\}$，使得其中有两个函数分别在 $\pm\gamma_\alpha$ 上等于 1，而所有 $\chi_{\alpha\beta}$ 关于 $\beta$ 的和为 1，于是 $\{\chi_{\alpha\beta}(x)h_\alpha(\xi)\}$ 就构成所需的单位分解. 从而由前面的说明就得到了 $\mathscr{M}$ 的一组基. 再根据 $Op(\Sigma^{m,m'})$ 类算子的运算规则知(4.3.24)与(4.3.25)成立. □

利用关于指标的归纳法，可以将定理 4.3.4 推广到重指标的情形，即如下定理：

**定理 4.3.5** 设 $\{M_i\}$ 如定理 4.3.5 中所给定，$M^I=M_{i_1}\circ\cdots\circ M_{i_l}$，则存在 $A_{IJ}\in Op(\Sigma^{2,-1})$，$B_{IK}\in Op(\Sigma^{0,0})$，它们在 $\tilde{\Gamma}$ 上满足

$$A_{IJ}\in Op(\Sigma^{2,-2})+Op(\Sigma^{1,0}),$$

$$B_{Ik}\in Op(\Sigma^{0,-1})+Op(\Sigma^{-1,1}),$$

且使得交换子关系

$$[\square, M^I]=\sum_{0\le|J|\le|I|}A_{IJ}M^J+\sum_{0<|K|\le|I|-1}B_{IK}M^K\square \tag{4.3.27}$$

成立.

其详细证明留给读者.

**定理 4.3.6** 设 $u$ 是波动方程

$$\square u=f(t,x,y,u) \tag{4.3.28}$$

的 $H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega)$ 解，在 $t<0$ 上 $u\in H^{s,-\frac{1}{2}}(\mathscr{M},k)$，$s>2$，则在原点附近对一切 $s'<s$，有 $u\in H^{s',-\frac{1}{2}}(\mathscr{M},k)$.

**证明** 用归纳法证：对每个 $l\le k$，$u\in H^{s',-\frac{1}{2}}(\mathscr{M},l)$. 以 $U_l$ 记向量值函数 $\{M^Iu\}$，其中 $0\le I\le l$. 希望能归纳地证明如下的命题：

$$
(H_l)\begin{cases}\square U_l + \mathscr{R}_l U_l = F_l, \\ \text{其中 } \mathscr{R}_l \in Op(\Sigma^{2,-1}), \\ \text{在}\tilde{\gamma}\text{ 上 } \mathscr{R}_l \in Op(\Sigma^{2,-2}) + Op(\Sigma^{1,0}), \\ \text{对 } s < s', \text{有 } F_l \in H^{s'-2,\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{4.3.29}
$$

命题$(H_l)$对$l = 0$成立是显然的. 今若命题对$l$成立,即可断言$u \in H^{s',-\frac{1}{2}}(\mathscr{M}, l)$. 事实上,$u \in H^{s,-\frac{1}{2}}$说明$U_l \in H^{s,-\frac{1}{2}-l}$,则在一切非特征点,算子$\square + \mathscr{R}_l$可以具有二次微局部意义下的逆算子,它属于$Op(\Sigma^{-2,0})$,故$U_l \in H^{s',\frac{1}{2}}$. 在特征点,利用定理4.3.1的结论,可知在二次微局部的意义下$U_l \in H^{s',-\frac{1}{2}}$,所以$u \in H^{s',-\frac{1}{2}}(\mathscr{M}, l)$. 这样,为证明定理,只需指出由$u \in H^{s',-\frac{1}{2}}(\mathscr{M}, l)$可推得命题$(H_{l+1})$.

利用定理4.3.5可得

$$
\square U_{l+1} + \mathscr{R}_{l+1} U_{l+1} = F_{l+1}, \tag{4.3.30}
$$

其中$\mathscr{R}_{l+1}$由$A_{I,J}$组成,而$F_{l+1}$由$(M^I + \Sigma B_{IK} M^K)\square u$组成,其中$|I| = l + 1$. 由定理4.3.3知,$\square u = f(t, x, y, u) \in H^{s',\frac{1}{2}}$,所以

$$
F_{l+1} \in H^{s',-\frac{3}{2}} \subset H^{s'-2,\frac{1}{2}}. \tag{4.3.31}
$$

此外,$\mathscr{R}_{l+1}$的性质由定理4.3.5给出. 这样,就推得了$(H_{l+1})$,从而定理4.3.6得证. □

定理4.3.6就是关于波动方程三叉奇性干扰的结论. 由此定理也可推得下面形式的结果,它的条件与结论都不用二次微局部的方式表达.

**定理 4.3.7** 设$u$是方程(4.3.28)的$H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$解,在$t < 0$时,对$\sigma > \dfrac{3}{2}$和任意整数$k$,有$u \in H^{\sigma}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3, k)$,则对每个$\sigma' < \sigma$,有

(1) $u \in H^{\sigma+k}$ 在 $(\bigcup \Sigma_j) \bigcup \Gamma^+$ 外;

(2) $u \in H^{\sigma}(\Sigma_j, k)$ 在 $\Sigma_j \backslash (\bigcup_{i \neq j} \Sigma_i \bigcup \Gamma^+)$ 附近;

(3) $u \in H^{\sigma}(\Gamma^+, k)$ 在 $\Gamma^+ \backslash (\bigcup \Sigma_j)$ 附近.

这个定理可由定理 4.3.6 推出. 事实上,注意,在 $t < 0$ 时,双指标 Sobolev 空间 $H^{s,s'}$ 与常义的 Sobolev 空间 $H^{s+s'}$ 在局部意义下是全同的,故取 $s = \sigma + \dfrac{1}{2}$, 定理 4.3.7 的各个结论即可由 $u \in H^{s',-1/2}(\mathscr{M}, k)$ 推得. 定理最终说明了,在三个带有余法奇性的波阵面相干扰以后,可能有新的奇性沿着过三叉交点的特征锥传播出去,而在除这些特征曲面外,解的正则性几乎不变.

关于三叉奇性干扰的进一步研究, J. Y. Chemin 在文献[32]中讨论了方程(4.3.28)右端还依赖于未知函数的导数的情形. 文献[67]中讨论了高阶双曲型方程的三叉奇性干扰. 二次微局部分析方法在研究双曲型方程组 Canchy 问题的花状奇性结构时也十分有用,读者可参见文献[21]、[51]等.

# 第 5 章

# 完全非线性方程的奇性传播定理

## § 5.1　主型方程的奇性传播定理

本章讨论完全非线性方程的奇性分析，主要讨论弱奇性传播问题. 由于方程的特征与解有关，故在这种情形下，解的奇性传播问题要比线性或半线性情形复杂. 这时，不仅解的奇性的传播途径，甚至解的奇性的刻画都与未知的解有关. 在讨论完全非线性方程的弱奇性传播时，为了利用对线性方程的一些处理方法，先得设法对非线性方程进行线性化. 线性化的方法自然有多种，其中一种最有效的方法，是利用仿微分算子作线性化，因为在这种线性化的过程中，所舍弃的是具有较高正则性的项，而这种舍弃一般不影响奇性分析. 这样，一个非线性问题就可化成线性问题进行处理了. 关于仿微分算子的理论在文献[16]、[57]、[109]中有详细的介绍，为了读者的阅读方便，在附录中对仿微分算子的一些基本的结果给出了概要的回顾.

在第 2 章中已经证明了线性的主型偏微分方程解的奇性传播定理，这里采用微局部能量估计方法，给出另一个证明. 将此方法作相应的修改，就可以得到非线性方程的奇性传播定理. 我们将非线性方程的奇性传播定理分解成两步加以证明，也是为了使读者免于阅读一个过长的证明，并便于了解当所讨论的方程从线性变为非线性时，有些什么新的问题需要解决.

首先让我们来复述线性方程的奇性传播定理.

**定理 5.1.1**　设 $P$ 是定义在区域 $\Omega$ 中的线性狭义主型偏微分算子，$u$ 是方程 $Pu=f$ 的实解，$f\in H^{s+m-1}(\Omega)$，$A_0=(x_0,\xi_0)$

$\in T^*(\Omega)$ 满足 $p_m(x_0, \xi_0) = 0$，$\gamma$ 是算子 $P$ 过 $A_0$ 的次特征带，则由 $A_0 \notin WF_s(u)$ 可推知 $\gamma \cap WF_s(u) = \varnothing$.

定理 5.1.1 的证明基于一个微局部的能量估计，利用这个估计，可以逐步改进解在次特征带 $\gamma$ 上的微局部可微性. 函数 $u$ 在 $(x_0, \xi_0)$ 的微局部正则性，已在上章中定义过，又若 $U$ 为 $T^*(\Omega)$ 中的锥子集，则 $u \in H^s(U)$ 就意味着 $u \in H^s(x, \xi)$ 对一切 $(x, \xi) \in U$ 成立，并且还定义 $u$ 的半模为

$$|u|_{s, U} = \| Mu \|_{H^s}, \tag{5.1.1}$$

其中 $M$ 为支集在 $U$ 中的零阶拟微分算子.

我们先对定理作一些化简. 对算子 $P$ 乘以一个 $1-m$ 阶的椭圆型偏微分算子 $Q$，则问题就化成 $P$ 是一阶算子的情形. 事实上，若 $Q$ 的主象征 $q(x, \xi)$ 为齐 $1-m$ 次函数，则在 $Pu = f$ 两端乘以 $Q$ 后，可得 $QPu = Qf$. 注意到 $q(x, \xi)$ 恒不为零，故在 $P$ 的次特征带上 $H_{p_m q}$ 与 $H_{p_m}$ 相平行，所以 $QP$ 的次特征带与 $P$ 的次特征带完全一致. 另一方面，由于 $1-m$ 阶椭圆型算子的作用将分布 $f$ 的 $WF^{s-m+1}$ 波前集变成 $WF^s$ 波前集，所以对于 $m$ 阶算子 $P$ 的定理 5.1.1 可以由 $m = 1$ 的情形推出. 此外，可以只考虑曲线 $\gamma$ 在 $(x_0, \xi_0)$ 点附近的一段，若此时定理的结论成立，就不难通过逐次延拓，得到定理对整个 $\gamma$ 成立.

设 $V$ 是点 $A$ 的锥邻域，$U$ 是曲线 $\gamma$ 的锥邻域，我们建立如下形式的能量不等式：

$$\begin{aligned} \| K_\delta u \|_\tau \leq \delta \| K_\delta P u \|_\tau & \\ + M\{ |u|_{\tau, V} + |Pu|_{\tau-1, U} + |u|_{\tau-\tau_1, U} + \| u \|_{-N} \}&, \\ \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega_1)&, \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

其中 $\tau_1 > 0$，$\Omega_1 \subset \Omega$，$N$ 为一任意正数，而 $K_\delta$ 为一适当的零阶拟微分算子，其象征 $k_\delta$ 满足在下面引理 5.1.1 中列举的性质. 当 $\tau = 0$ 时，估计式(5.1.2)简化为

$$\| K_\delta u \|_0 \leq \delta \| K_\delta Pu \|_0 + M(\delta)\{|u|_{0,V} + \| u \|_{-r_1}\}. \tag{5.1.3}$$

这样，以下需要证明两件事：一是指出定理 5.1.1 的结论可以由(5.1.2)式导出；二是证明微局部能量估计式(5.1.2)，而作为其第一步，先证明(5.1.3)。

**引理 5.1.1** 存在拟微分算子 $K_\delta$，它的象征 $k_\delta$ 满足：

(1) $C^\infty$ 光滑，支集含在 $U$ 中，在 $\gamma$ 上为正；

(2) 关于 $\xi$ 为零次齐次函数；

(3) 在 $V$ 外 $Hk_\delta \geq \frac{2}{\delta}k_\delta$，这里 $H$ 是 $p_m(x, \xi)$ 的 Hamilton 向量场。

**证明** 将所有诸量 $(x_0, \xi_0)$、$H$、$\gamma$、$U$、$V$ 投影到余法丛 $T^*(\Omega)$ 上，可以先在余法丛上构造 $k_\delta$，然后关于 $\xi$ 作齐零次延拓。由方程为狭义主型的假定知 $H \neq 0$，故可以作 $T^*(\Omega)$ 上的同胚变换，它将次特征 $\gamma$ 拉直，并将 $H$ 变成 $H_1 = \partial_{y_1}$。以下不妨设 $A_0$ 的象为 $(1, 0, \cdots, 0)$，次特征 $\gamma$ 上指定段的象为 $(0, 0, \cdots, 0)$ 到 $(1, 0, \cdots, 0)$ 的区间。于是容易构造一个 $C^\infty$ 函数 $\zeta(y_1)$，使得对充分小的 $\delta > 0$，函数 $\zeta$ 的支集在区间 $(-\delta, 1+\delta)$ 上，在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 外 $\zeta'(y_1) \geq 0$。再作 $C_0^\infty$ 函数 $\theta(y_2, \cdots, y_{n+1})$ 的支集在原点的 $\delta$ 邻域。令 $\phi(y) = \zeta(y_1)\theta(y_2, \cdots, y_{n+1})$，则 $\phi(y)$ 的支集含在 $\tilde{\gamma}$ 的邻域 $\tilde{U}$ 中，且在 $\tilde{U}\backslash\tilde{V}$ 中 $H_1\phi \geq 0$。

现令 $\tilde{k}_\delta = \phi\exp(2y_1/\delta)$，则

$$H_1\tilde{k}_\delta = (H_1\phi)\exp(2y_1/\delta) + \frac{2}{\delta}\tilde{k}_\delta \geq \frac{2}{\delta}\tilde{k}_\delta. \tag{5.1.4}$$

回到球丛上的原始坐标，并作关于 $\xi$ 的齐次延拓，就证明了引理。□

**引理 5.1.2** 设 $K_\delta$ 是以引理 5.1.1 中构造的 $k_\delta$ 为象征的拟微分算子，则(5.1.3)成立。

**证明** 考虑内积 $(K_\delta Pu, K_\delta u)$，我们有

$$\operatorname{Im}(K_\delta Pu, K_\delta u) - \operatorname{Im}(PK_\delta u, K_\delta u)$$
$$= \operatorname{Re}(iK_\delta^*[P, K_\delta]u, u). \quad (5.1.5)$$

估计等式左端的两项,显然

$$|\operatorname{Im}(K_\delta Pu, K_\delta u)| \leq \| K_\delta Pu \|_0 \| K_\delta u \|_0. \quad (5.1.6)$$

又 $P - P^*$ 为零阶拟微分算子,故

$$|\operatorname{Im}(PK_\delta u, K_\delta u)| = |((P - P^*)K_\delta u, K_\delta u)|/2$$
$$\leq C \| K_\delta u \|_0^2. \quad (5.1.7)$$

另一方面,在(5.1.5)的右端,$[P, K_\delta]$也是以 $Hk_\delta/\mathrm{i}$ 为主象征的零阶拟微分算子,故算子 $\mathrm{i}K_\delta^*[P, K_\delta]$ 有主象征 $\bar{k}_\delta Hk_\delta$,它在 $V$ 外不小于 $\frac{2}{\delta}|K_\delta|^2$,所以可以写出

$$\mathrm{i}K_\delta^*[P, K_\delta] = \frac{2}{\delta}K_\delta^* K_\delta + S_1 + S_2, \quad (5.1.8)$$

其中 $S_1$ 与 $S_2$ 为零阶拟微分算子,且 $S_1$ 的主象征是非负的,而 $S_2$ 的主象征在 $V$ 外为零.这样,利用 Gårding 不等式,有

$$\operatorname{Re}(\mathrm{i}K_\delta^*[P, K_\delta]u, u) \geq \frac{2}{\delta}\| K_\delta u \|_0^2$$
$$- M\| u \|_{-N}^2 - M|u|_{0,V}^2. \quad (5.1.9)$$

取 $\delta$ 充分小,并将(5.1.6)、(5.1.7)、(5.1.9)代入(5.1.5),即得(5.1.3)式.□

**引理 5.1.3**　在上述假定下,估计式(5.1.2)成立.

**证明**　取 $E$ 是 $r$ 阶的恰当支集拟微分算子,它在 $k_\delta$ 的支集的邻域 $U$ 中以 $(1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}}$ 为象征,则由拟微分算子的运算法可知

$$\| K_\delta u \|_r = \| \Lambda^r K_\delta u \|_0$$
$$\leq \| EK_\delta u \|_0 + \| (\Lambda^r - E)K_\delta u \|_0$$

$$\leq \|K_\delta Eu\|_0 + \|[E, K_\delta]u\|_0 + \|(\Lambda^\tau - E)K_\delta u\|_0$$

$$\leq \|K_\delta Eu\|_0 + C|u|_{\tau-1,U} + C\|u\|_{-N}, \quad (5.1.10)$$

其中 $N$ 是任意大的正数. 由(5.1.3)式指出

$$\|K_\delta Eu\|_0 \leq \delta\|K_\delta PEu\|_0 + M(|E_u|_{0,V} + \|Eu\|_{-\tau_1})$$

$$\leq \delta\|K_\delta PEu\|_0 + M(|u|_{\tau,V} + \|u\|_{-N} + |u|_{\tau-\tau_1,U}),$$

(5.1.11)

再将 $K_\delta PE$ 写成

$$EK_\delta P + [K_\delta, E]P + [K_\delta, [P, E]] + [P, E]K_\delta$$

并估计每一项,可得

$$\|K_\delta PEu\|_0 \leq C(\|K_\delta Pu\|_\tau + \|K_\delta u\|_\tau)$$

$$+ M(|Pu|_{\tau-1,U} + |u|_{\tau-\tau_1,U} + \|u\|_{\tau-1}).$$

(5.1.12)

将它代入(5.1.10),并取 $\delta$ 充分小,即得(5.1.2)式. □

**定理 5.1.1 的证明** 不失一般性,可设 $u$ 的支集是 $\Omega$ 的紧集. 在此应指出,由等式(5.1.2)各项的有界性可以得到 $u \in H^\tau(\Upsilon)$. 为此,以 $J_\eta$ 记磨光算子,则 $J_\eta^2 u$ 属于 $C_0^\infty(\Omega)$. 由(5.1.2)有

$$\|K_\delta J_\eta^2 u\|_\tau \leq \delta\|K_\delta PJ_\eta^2 u\|_\tau + M\{|J_\eta^2 u|_{\tau,V}$$

$$+ |PJ_\eta^2 u|_{\tau-1,U} + |J_\eta^2 u|_{\tau-\tau_1,U} + \|J_\eta^2 u\|_{\tau-1}\}.$$

(5.1.13)

由于 $u \in H^{\tau-1}$, 且 $u$ 微局部地属于 $H^\tau(V) \cap H^{\tau-\tau_1}(U)$, 故在 $\eta \to 0$ 时,

$$|J_\eta^2 u|_{\tau-\tau_1,U} \to |u|_{\tau-\tau_1,U}, \quad |J_\eta^2 u|_{\tau,V} \to |u|_{\tau,V},$$

$$\|J_\eta^2 u\|_{\tau-1} \to \|u\|_{\tau-1}.$$

另一方面，因为$[P, J_\eta^2]$是从 $L^2$ 到 $L^2$ 的有界算子，且其算子模关于 $\eta$ 一致有界，从而

$$|PJ_\eta^2 u|_{\tau-1,U} \leq |Pu|_{\tau-1,U} + C|u|_{\tau-1,U},$$

$$\begin{aligned}
\| K_\delta P J_\eta^2 u \|_\tau \leq & \| K_\delta J_\eta^2 P u \|_\tau + \| [K_\delta, [J_\eta^2, P]]u \|_\tau \\
& + \| [J_\eta^2, P] K_\delta u \|_\tau \\
\leq & \| K_\delta J_\eta^2 P u \|_\tau + \| [K_\delta, [J_\eta^2, P]]u \|_\tau \\
& + \| [J_\eta [J_\eta, P]] K_\delta u \|_\tau \\
& + 2 \| [J_\eta, P] J_\eta K_\delta u \|_\tau .
\end{aligned}$$

这一表达式是被

$$C( \| Pu \|_\tau + \| u \|_{\tau-1} + \| K_\delta J_\eta u \|_\tau)$$

所控制的，所以在 $\eta$ 充分小时，有

$$\begin{aligned}
\| K_\delta J_\eta u \|_\tau \leq & \| K_\delta J_\eta^2 u \|_\tau + \| [K_\delta, J_\eta - I] J_\eta u \|_\tau \\
& + \| (J_\eta - I) K_\delta J_\eta u \|_\tau \\
\leq & C_1 \delta \| K_\delta J_\eta u \|_\tau + \frac{1}{2} \| K_\delta J_\eta u \|_\tau + C_2,
\end{aligned}$$

其中 $C_2$ 依赖于 $\| Pu \|_\tau$、$\| u \|_{\tau-1}$、$|u|_{\tau,V}$、$|u|_{\tau-\tau_1,U}$. 于是，取 $\delta < 1/(4C_1)$，就可得

$$\| K_\delta J_\eta u \|_\tau \leq 2C_2. \tag{5.1.14}$$

又注意，$\eta \to 0$ 时，$J_\eta u \to u(H^{\tau-1})$，即得在 $\eta \to 0$ 时

$$K_\delta J_\eta u \to K_\delta u.$$

利用 Banach-Saks 定理和(5.1.14)式，可知 $K_\delta u \in H^\tau$，但 $k_\delta$ 在 $\gamma$ 上为正，故 $u$ 微局部地属于 $H^\tau(\gamma)$.

上述论证说明了，当 $\tau \leq s$ 时，由 $u \in H_\gamma^{\tau-\tau_1} \cap H^{-N}(\Omega)$、$u \in H_A^\tau$、$Pu \in H_\gamma^\tau$ 可以推出 $u \in H_\gamma^\tau$. 由于可假设 $u$ 具有紧支集，故总可以取到 $-N$ 使得 $u \in H^{-N}$. 从而利用归纳法，可以逐步地提高

$u$ 在 $\gamma$ 上的正则性，直至它与 $Pu$ 在 $\gamma$ 上的正则性和 $u$ 在 $A_0$ 点的正则性相一致. □

现在转到非线性情形的研究，讨论完全非线性方程

$$\mathscr{F}[u] \triangleq F(x, u(x), \cdots, \partial^\alpha u(x), \cdots)_{|\alpha|\leq m} = 0, \tag{5.1.15}$$

其中 $F$ 是它的变元的 $C^\infty$ 函数. 当 $u \in H^s$ 且 $s > \frac{n}{2} + m$ 时，$\mathscr{F}[u]$ 为 $x$ 的连续函数. 如前所述，方程(5.1.15)的特征多项式

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x, u(x), \cdots)(\mathrm{i}\xi)^\alpha$$

以及相应的次特征带都是与 $u$ 有关的. 完全非线性方程的奇性传播定理的一般形式为：

**定理 5.1.2** 设 $u$ 是方程(5.1.15)的解，$u \in H^s_{loc}(\Omega)$，$s > \frac{n}{2} + m + 2$，$A_0(x_0, \xi_0)$ 是方程的特征点，$\gamma$ 是过 $A_0$ 的次特征带，又对于 $t \leq 2s - \frac{n}{2} - m - 1$，有 $u \in H^t(x_0, \xi_0)$，则 $u \in H^t_\gamma$.

有了定理 5.1.1 所作的方法上的准备，本定理的证明就容易给出. 以下我们只强调这两个证明的差别，也就是在非线性情形下需要多处理些什么. 简言之，其主要的区别有二：一是与半线性的情形相仿，必须先假定 $u$ 的某些正则性，例如 $u \in H^{m+2}$，那时 Hamilton-Jacobi 方程组具有 $C^1$ 的系数，从而次特征带可以被合理地定义；二是由于特征方程的系数也只是有限光滑的，定理 5.1.1证明中的各步，包括算子 $K_\delta$ 的构造必须作相应的修正.

如同定理 5.1.1 的证明那样，首先要作的当然是将方程(5.1.15)线性化. 这里利用仿线性化与仿微分算子的理论，将该非线性方程线性化为(参见附录中定理 A. 25)：

$$\sum_{|\alpha|\leq m} T_{\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial u_\alpha}} \partial^\alpha u = r, \tag{5.1.16}$$

其中 $r$ 是具有较高正则性的函数. 当 $t > 2s - \frac{n}{2} - m - 1$ 时, $r \in H^{2(s-m)-\frac{n}{2}}(\Omega)$;而当 $t \leq 2s - \frac{n}{2} - m - 1$ 时, $r \in H^{t-m+1}$.

**定理 5.1.3**　设 $P \in Op(\Sigma_\sigma^m)(\Omega)$,其中 $\sigma > 1$ 为非整数,$P$ 的主象征 $p_m$ 是 $C^2$ 实函数. 又设 $u \in H^s$, $Pu \in H^{t-m+1}(\Omega)$, 以及 $u \in H^t(x_0, \xi_0)$, 其中 $s$ 与 $t$ 满足定理 5.1.2 中给出的限制,则对于通过 $(x_0, \xi_0)$ 的次特征带 $\gamma$, $u$ 微局部地属于 $H^t(\gamma)$.

**证明**　本定理的证明步骤与定理 5.1.1 相仿,但由于方程(5.1.16)的主象征 $p_m(x, \xi)$ 只是 $C^2$ 函数,故如引理 5.1.1 所构造的 $k_\delta$ 不是 $C^\infty$ 函数,为此引入 $C_0^\infty$ 函数 $j_\varepsilon(z)$,它满足 $\int j_\varepsilon \mathrm{d}z = 1$, 其中 $\mathrm{d}z$ 为球上的体积元,以 $k_{\delta\varepsilon} = k_\delta * j_\varepsilon = \int k_\delta(z - z')j_\varepsilon(z')\mathrm{d}z'$ 来代替 $k_\delta$. 显然, $k_{\delta\varepsilon}$ 是 $C^\infty$ 的正函数,且

$$Hk_{\delta\varepsilon} = \int Hk_\delta(z - z')j_\varepsilon(z')\mathrm{d}z' \geq \frac{2}{\delta}k_{\delta\varepsilon},$$

从而将 $k_{\delta\varepsilon}$ 关于 $\xi$ 作齐零次延拓后,该象征就满足引理 5.1.1 中的一切条件. 然后算子 $K_\delta$ 也容易得到.

参照引理 5.1.2 与引理 5.1.3 的证明,并用仿微分算子代替其中相应的算子,就可完成定理 5.1.3 的证明. 事实上,由于仿微分算子的运算规则与拟微分算子相同,故上述两引理证明的思路仍可采用. 在(5.1.8)中的算子 $S_2$ 是一阶仿微分算子,其主象征在 $V$ 外为零. 为估计 $(S_2u, u)$,我们作算子 $L$,它的象征 $l \in S^0$ 在 supp Sym$(S_2)$上为 1,而在 $V$ 外为零,则 $R_2 = (I - L)S_2$ 是一个低阶算子. 另一方面,$L$ 的共轭算子 $L^*$ 可以表示为一个 $C^\infty$ 正则算子 $R_1$ 和一个象征在 $V$ 外为零的算子 $L'$ 之和. 以 $R_2$ 记在仿微分算子运算过程中所导出的低阶算子,则在 $\tau_1 < \frac{1}{2}$ 时,有

$$\begin{aligned}|(S_2u, u)| &\leq |(LS_2u, u)| + |(R_2u, u)| \\ &= |(S_2u, L^*u)| + |(R_2u, u)|\end{aligned}$$

$$\le |(S_2u,\ L'u)| + |(S_2u,\ R_1u)| + |(R_2u,\ u)|$$

$$\le M(|u|_{0,V}^2 + \|u\|_{-r_1}^2),$$

所以(5.1.9)仍成立. □

**注** 若方程(5.1.15)的非线性程度较弱,则定理 5.1.2 的结论可以相应地加强. 例如,当(5.1.15)是拟线性方程时,定理的结论在 $s > \frac{n}{2} + m + 1$, $t \le 2s - \frac{n}{2} - m$ 时成立. 又当(5.1.15)仅仅是半线性方程,则定理的结论在 $s > \frac{n}{2} + m - 1$, $t \le 2s - \frac{n}{2} - m + 1$ 时仍成立.

从定理 5.1.2 容易导出非线性方程解的 $H^t$ 正则性延拓定理. 它可陈述如下:

**定理 5.1.4** 设(5.1.15)是关于 $x_n$ 的双曲型方程,$u$ 是它的 $H^s(\Omega)$解,其中 $s > \frac{n}{2} + m + 2$, $\Omega$ 位于 $\Omega_- = \Omega \cap \{x_n < 0\}$ 的决定区域中. 又在 $x_n < 0$ 时 $u \in H^t$, $t > s$, 则 $u$ 在整个区域 $\Omega$ 中属于 $H^t$.

**证明** 取 $s_1 = \min\{2s - \frac{n}{2} - m - 1,\ t\}$,对 $\Omega \cap \{x_n > 0\}$ 中的任意点 $x_0$ 以及任意方向 $\xi_0$,考察 $u$ 在$(x_0,\ \xi_0)$处的正则性. 若$(x_0,\ \xi_0)$不是(5.1.15)的特征点,则方程在该点是微局部椭圆的,于是由椭圆正则性定理可知 $u \in H^{2s-\frac{n}{2}-m-1} \in H^{s_1}(x_0,\ \xi_0)$. 又若$(x_0,\ \xi_0)$是方程(5.1.15)的特征点,则由定理 5.1.2 得到 $u \in H^{s_1}(x_0,\ \xi_0)$. 由于 $\xi_0$ 可以遍历 $R_\xi^n$ 的一切方向,故 $u \in H^{s_1}(x_0)$. 又由 $x_0$ 的任意性,可知 $u \in H^{s_1}(\Omega)$. 以 $s_1$ 代替 $s$ 又可用同样的方法改进 $u$ 的正则性,直至 $u \in H^t(\Omega)$. □

完全非线性方程的奇性反射问题也得到了深入的研究. 这时新的困难是:在含边界的区域中,原有的仿线性化方法不能直接应用. 为此,Sable-Tougeron 建立了切向仿线性化的概念与相应的运算规则. 无论是对微分方程本身的约化还是对解的奇性的描写,都需在边界切向与法向作不同的处理. 文献[120]中在载有奇性的

次特征与边界横截的假定下，得到了奇性反射的结果. 相应地，仍以仿线性化为主要工具，在文献[138]中讨论了非线性方程次特征与边界相切情形下的奇性反射问题.

## §5.2 完全非线性方程的余法奇性传播

上一节中讨论了完全非线性方程解的波前集型奇性的传播定理. 与半线性方程的情形相仿，对于一般的方程，定理只能给出大体上不超过 $2s$ 阶的弱奇性的传播，因此在本节中，讨论完全非线性方程余法奇性的传播. 如第 3 章中所述，分布 $u$ 的余法奇性的描述总是与一个基准子流形族 $\mathscr{S}$ 有关. $u$ 在子流形族 $\mathscr{S}$ 中每个子流形 $S$ 的法向与切向的正则性是不相同的. 当 $u$ 是某个偏微分方程的解时，若 $S$ 为承载 $u$ 的弱奇性的曲面，则 $S$ 必定是方程的特征曲面. 由于现在讨论的是完全非线性方程，所以特征曲面本身与解也有关，从而 $S$ 也可能含有奇性，相应地，$S$ 的切向量场的表示中也将出现奇性. 这样，为使 $u$ 的余法奇性能合理地定义，也还需作相应的补充讨论. 至于有关定理的叙述与证明，自然更复杂. 在本节中，主要讨论完全非线性双曲型方程的单个余法奇性波的传播.

仍设 $\Omega$ 为 $R^n$ 中的一个区域，它与 $x_n=0$ 相交. 在 $\Omega$ 中给出方程

$$F(x,\ u(x),\ \cdots,\ \partial^\alpha u(x),\ \cdots)_{|\alpha|\le m}=0. \tag{5.2.1}$$

设 $u$ 是方程(5.2.1)的 $H^{s+m}\left(s>\dfrac{n}{2}\right)$ 解. 记 $\partial^\alpha u(x)$ 为 $u^{(\alpha)}$，作 $F$ 关于 $u$ 的线性化算子 $P$ 为

$$P=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(x,\ u(x),\ \cdots)\partial_x^\alpha. \tag{5.2.2}$$

设对于给定的 $u$ 算子 $P$ 关于变量 $x_n$ 是严格双曲型的. 并设 $\Omega$ 位于 $\Omega_-=\Omega\cap R^n_-$ 所决定的区域中. 记 $x'=(x_2,\ \cdots,\ x_{n-1})$，设曲面

$S: x_1 = \phi(x', x_n)$ 是方程(5.2.1)的特征曲面，我们证明可以从 $x_n < 0$ 时特征曲面 $S$ 的正则性与解 $u$ 的某些余法型正则性推得 $x_n > 0$ 相应的正则性.

**定理 5.2.1**　设 $s > \frac{n}{2} + \frac{7}{2}$, $\sigma > \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$, $u \in H^{s+m}(\Omega)$ 是方程(5.2.1)的解，$S$ 是具有 $H^\sigma$ 正则性的特征曲面. 若在 $\Omega_-$ 中 $S \in C^\infty$, $u \in H^{s+m,\infty}(S)$, 则在整个 $\Omega$ 中，$S$ 为 $C^\infty$ 的，且 $u \in H^{s+m,\infty}(S)$.

这个定理的证明将通过几个引理来完成. 首先，为了克服定义余法奇性的困难，作一个坐标变换 $\chi$，将 $S$ 展平为 $x_1 = 0$. 对于 $u$ 在新坐标系中的表示，定义余法奇性是可行的，而原方程的解就是一个具有特定余法奇性的分布 $u$ 与一个非光滑坐标变换 $\chi$ 的复合. 在将非线性偏微分方程作仿线性化处理时，也需要对上述复合作相应的线性化处理，这就是所谓仿复合. 关于仿复合算子的概念以及它与仿微分算子的关系可见文献[1]、[2]及[57]. 有关结果的概述见本书附录. 利用仿微分算子与仿复合算子我们建立在新坐标系中分布 $\chi^* u$ 的仿微分方程，然后用穿梭法反复地提高 $\chi$ 的正则性与 $\chi^* u$ 的正则性. 最终达到所需的结果.

因为 $x_1 = \phi(x', x_n)$ 是方程(5.2.1)的特征曲面，故 $\phi$ 满足方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_n} = \lambda(\phi, x', x_n, u(x), \cdots; -1, \nabla_{x'}\phi), \quad (5.2.3)$$

其中 $\lambda(x_1, x', x_n, u, \cdots; \xi_1, \xi')$ 是将

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(x, u, \cdots)\xi^\alpha = 0$$

视为 $\xi_n$ 的方程时的实根.

将原始的坐标记为 $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$，引入 $H^\sigma$ 同胚变换 $\chi$:

$$\bar{x}_1 = x_1 + \phi(x', x_n), \ \bar{x}' = x', \ \bar{x}_n = x_n, \quad (5.2.4)$$

则特征曲面 $S$ 在新坐标系中的方程为 $x_1 = 0$，而函数 $v(\phi(x',$

$x_n)$, $x'$, $x_n)$可以视为$v\circ\chi$在$x_1=0$时的取值.

**引理 5.2.1** 设$s>\frac{n}{2}+\frac{7}{2}$, $\sigma>\frac{n}{2}+\frac{3}{2}$, $u\in H^{s+m}$, $\phi$满足(5.2.3),则$\phi\in H^{s-\frac{1}{2}}$. 又若$\chi^* u\in H^{s+m,k}$,则$\phi\in H^{s+k-\frac{1}{2}}$.

**证明** 首先导出(5.2.3)的仿线性化方程,在将(5.2.3)作为$\phi$的非线性偏微分方程处理时,其中的$u(x_1, x', x_n)$应视为给定的函数. 但是,$u$只是$H^{s+m}$正则的函数,所以在对(5.2.3)进行仿线性化处理时,必须同时考虑非线性与非正则函数所带来的影响.

不妨设$\sigma<s-\frac{1}{2}$,因为不然,引理结论自然成立. 由于$\phi\in H^\sigma$,则由嵌入定理知$u^{(\alpha)}\circ\chi\in C^{\sigma-\frac{n}{2}}$, $(\partial_{x_1}u^{(\alpha)})\circ\chi\in C^{\sigma_1}$,其中$\sigma_1=\min\left(s-\frac{n}{2}-1, \sigma-\frac{n}{2}\right)$. 由仿复合公式(A.33)知,对于任一函数$v\in H^{s'}\left(s'>\frac{n}{2}+1\right)$,有

$$v\circ\chi=\chi^* v+T_{v'\circ\chi}\chi+R,\quad R\in H^{\sigma+\sigma_1},\qquad (5.2.5)$$

所以

$$\begin{aligned}u^{(\alpha)}(\phi, x', x_n)&=u^{(\alpha)}\circ\chi|_{x_1=0}\\&=\chi^* u^{(\alpha)}|_{x_1=0}+(T_{(\partial_{x_1}u^{(\alpha)})\circ\chi}\chi)_{x_1=0}+R_1|_{x_1=0}\\&=\chi^* u^{(\alpha)}|_{x_1=0}+T_{(\partial_{x_1}u^{(\alpha)})(\phi, x', x_n)}\phi+R_1|_{x_1=0}+Q_1\phi,\end{aligned}\qquad (5.2.6)$$

其中$Q_1$是出现在(A.17)中的$\sigma_1$正则算子,又由迹定理知$R_1|_{x_1=0}\in H^{\sigma+\sigma_1-\frac{1}{2}}$,所以有

$$u^{(\alpha)}(\phi, x', x_n)\in H^\sigma.$$

同样地有

$$\begin{aligned}(\partial_{x_1}u^{(\alpha)})(\phi, x', x_n)&=(\chi^*\partial_{x_1}u^{(\alpha)})|_{x_1=0}\\&\quad+T_{(\partial^2_{x_1}u^{(\alpha)})(\phi, x', x_n)}\phi+R_2|_{x_1=0}+Q_2\phi,\end{aligned}$$

其中 $R_2|_{x_1=0}\in H^{s-\frac{3}{2}}$，$Q_2$ 为 $\sigma_2$ 正则算子，$\sigma_2=\min\left(s-\frac{n}{2}-2,\ \sigma-\frac{n}{2}\right)$. 又 $(\chi^*\partial_{x_1}u^{(\alpha)})|_{x_1=0}\in H^{s-\frac{3}{2}}$，从而

$$(\partial_{x_1}u^{(\alpha)})(\phi,\ x',\ x_n)\in H^{\min\left(s-\frac{3}{2},\ \sigma\right)}\subset H^{\sigma-1}.$$

将 $\phi$ 所满足的方程(5.2.3)仿线性化，可得

$$\lambda(\phi,\ x',\ x_n,\ u^{(\alpha)};\ -1,\ \phi_{x'})$$
$$=T_{\frac{\partial\lambda}{\partial\phi}}\phi+\sum T_{\frac{\partial\lambda}{\partial u^{(\alpha)}}}u^{(\alpha)}(\phi,\ x',\ x_n)+T_{\frac{\partial\lambda}{\partial\xi'}}\phi_{x'}+R_3,\tag{5.2.7}$$

其中 $R_3\in H^{2(\sigma-1)-\frac{n-1}{2}}$. 利用前而关于 $u^{(\alpha)}$ 的表示(5.2.6)，可以将 $T_{\frac{\partial\lambda}{\partial u^{(\alpha)}}}u^{(\alpha)}(\phi,\ x',\ x_n)$ 写成

$$T_{\frac{\partial\lambda}{\partial u^{(\alpha)}}}T_{\partial_{x_1}u^{(\alpha)}}\phi+T_{\frac{\partial\lambda}{\partial u^{(\alpha)}}}(\chi^*u^{(\alpha)}|_{x_1=0}+R_1|_{x_1=0}+Q_1\phi)$$
$$=T_{\frac{\partial\lambda}{\partial u^{(\alpha)}}\cdot\partial_{x_1}u^{(\alpha)}}\phi+R_4+R_5,\tag{5.2.8}$$

其中

$$R_4=T_{\frac{\partial\lambda}{\partial u^{(\alpha)}}}(\chi^*u^{(\alpha)}|_{x_1=0}+R_1|_{x_1=0}+Q_1\phi)$$
$$\in H^{\min\left(s-\frac{1}{2},\ \sigma+\sigma_1-\frac{1}{2}\right)},$$

而 $R_5$ 是由仿乘法算子复合所导出的余项. 由附录中定理 A. 11 知，它是 $H^{2\sigma-\frac{n+1}{2}}$ 函数. 将这些估计都用之于 $\phi$ 的仿线性化方程，就有

$$\phi_{x_n}=T_{\frac{\partial\lambda}{\partial\xi'}}\phi_{x'}+T_A\phi+R_6,\tag{5.2.9}$$

其中 $\frac{\partial\lambda}{\partial\xi'}$，$A\in H^{\sigma-1}$，$R_6$ 为前面引入的 $R_3$、$R_4$、$R_5$ 之和. 故若记

$$\theta=\min\left(2(\sigma-1)-\frac{n-1}{2},\ s-\frac{1}{2},\ \sigma+\sigma_1-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \min\left(2\sigma - \frac{n}{2} - \frac{3}{2},\ s - \frac{1}{2}\right),$$

则 $\phi \in H^{\theta}$. 事实上，由于 $\sigma - 1$ 为 $\dfrac{\partial \lambda}{\partial \xi'}$ 与 $A$ 的正则性指数，而 $n-1$ 为偏微分方程(5.2.9)中的自变量的个数，故由引理的假设知 $\sigma > \dfrac{n}{2} + \dfrac{3}{2}$，即 $(\sigma - 1) - \dfrac{n-1}{2} > 1$，从而由定理 5.1.3 知 $\phi$ 的 $H^{\theta}$ 正则性将沿方程(5.2.9)的次特征带传播，因而 $\phi$ 在 $t > 0$ 时是 $H^{\theta}$ 函数，所以，若 $\theta = s - \dfrac{1}{2}$，则引理中第一部分的结论已得证. 否则，以 $\theta$ 代替 $\sigma$，重复上述过程，可以进一步改进 $\phi$ 的正则性，直至 $\phi \in H^{s-\frac{1}{2}}$.

当 $\chi^* u$ 具有更高的正则性时，$\phi$ 也可以获得相应的更高的正则性. 由第一部分的结论，可以设 $\sigma = s - \dfrac{1}{2}$. 利用归纳法，为得到引理的结论，我们只需证明：当 $\phi \in H^{s+k-\frac{1}{2}}$，$\chi^* u \in H^{s+m,k+1}$ 时，可以推得 $\phi \in H^{s+k+\frac{1}{2}}$.

以下证明的思路与前一部分基本上一致. 由于 $\chi$ 是 $H^{\sigma+k}$ 变换，故在前面的推导中，诸余项的正则性应该为：

$$R \in H^{\sigma+k+\theta} \quad \left(\text{其中 } \theta = \min\left(\sigma + k - \frac{n}{2},\ s - \frac{n}{2} - 1\right)\right);$$

$$R_1|_{x_1=0} + Q_1\phi \in H^{\sigma+k+\left(s-\frac{n}{2}-1\right)-\frac{1}{2}} \subset H^{s+k+\frac{1}{2}};$$

$$R_2|_{x_1=0} + Q_2\phi \in H^{\sigma+k+\left(s-\frac{n}{2}-2\right)-\frac{1}{2}} \subset H^{s+k+\frac{1}{2}}.$$

为给出 $\chi^* u^{(\alpha)}$ 与 $\chi^* \partial_{x_1} u^{(\alpha)}$ 更高的正则性，我们利用仿复合与仿微分运算的结合定理(见附录中定理 A.28)，有

$$\chi^* u^{(\alpha)} = T_{l^{(\alpha)}} \chi^* u + R_\alpha u, \tag{5.2.10}$$

其中 $l^{(\alpha)} \in \Sigma^{|\alpha|}_{\sigma+k-1-\frac{n}{2}}$，$R_\alpha$ 是 $\left(\sigma + k - \dfrac{n}{2} - 1 - |\alpha|\right)$ 正则算子，所以

$$\chi^* u^{(\alpha)} \in H^{s+m-|\alpha|, k+1} \subset H^{s, k+1},$$

$$\chi^* \partial_{x_1} u^{(\alpha)} \in H^{s-1, k+1},$$

由此得

$$\chi^* u^{(\alpha)} |_{x_1=0} \in H^{s+k+\frac{1}{2}}, \ (\chi^* \partial_{x_1} u^{(\alpha)}) |_{x_1=0} \in H^{s+k-\frac{1}{2}};$$

$$u^{(\alpha)}(\phi, x', x_n) \in H^{s+k+\frac{1}{2}}, \ \partial_{x_1} u^{(\alpha)}(\phi, x', x_n) \in H^{s+k-\frac{1}{2}}.$$

另一方面,对于由(5.2.3)的仿线性化所导出的余项,有

$$R_3 \in H^{2(\sigma+k-1)-\frac{n-1}{2}};$$

$$R_4 \in H^{s+k+\frac{1}{2}};$$

$$R_5 \in H^{\sigma+k+\left(s+k+\frac{n-1}{2}\right)},$$

所以,由 $\sigma = s - \dfrac{1}{2} > \dfrac{n}{2} + 3$ 可知 $R_3 + R_4 + R_5 \in H^{s+k+\frac{1}{2}}$,从面利用定理 5.1.3 知 $\phi \in H^{s+k+\frac{1}{2}}$. 如前面所述,利用归纳法即可得到引理后半部分的结论. □

从引理 5.2.1 知,如果能够提高 $\chi^* u$ 的余法正则性,那就能相应地提高 $\phi$ 的正则性,所以在下面导出 $\chi^* u$ 所满足的仿微分方程,以期获得 $\chi^* u$ 较高的正则性.

**引理 5.2.2** 设 $s > \dfrac{n}{2} + \dfrac{7}{2}$, $\sigma = s - \dfrac{1}{2}$, $\phi \in H^{s+k-\frac{1}{2}}$, $u \in H^{s+m}$, $\chi^* u \in H^{s+m, k}$, 则 $\chi^* u$ 满足仿微分方程

$$T_{p^*} \chi^* u = R, \tag{5.2.11}$$

其中 $p^* = p_m^* + p_{m-1}^*$, $p_{m-j}^*$ 为 $m - j$ 阶微分算子的象征,系数属于 $C^{\sigma-j-1-\frac{n}{2}, k}$(其中 $j = 0$ 或 1), $R \in H^{s+1, k+1}$.

**证明** 如在引理 5.2.1 的证明中所指出的,当 $\chi^* u \in H^{s+m, k}$ 时, $\chi^* u^{(\alpha)} \in H^{s, k}$, 所以利用附录中定理 A.26 将 $\chi^*(F(x, u, \cdots, u^{(\alpha)}, \cdots))$ 仿线性化,可得

$$\sum_{\alpha} T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}} \chi^* u^{(\alpha)} + R_1 = 0, \tag{5.2.12}$$

其中 $R_1 \in H^{\left(s-\frac{1}{2}\right)+\left(s-1-\frac{n}{2}\right), k} \subset H^{s+1, k+1}$，$\partial F/\partial u^{(\alpha)}$的变元为

$$u^{(\alpha)} \circ \chi = \chi^* u^{(\alpha)} + T_{\nabla(u^{(\alpha)})\circ\chi}\chi + R_2 \in H^{s-\frac{1}{2}, k}.$$

在(5.2.12)右端的和式中，若 $|\alpha| \leq m-2$，则由于

$$\partial F/\partial u^{(\alpha)} \in H^{s-\frac{1}{2}, k} \subset C^{s-\frac{n+1}{2}, k},$$

从而根据附录中的定理 A.14 知

$$T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}} \chi^* u^{(\alpha)} \in H^{s+m-|\alpha|, k} \subset H^{s+1, k+1}.$$

对于 $|\alpha| = m-1$ 和 $m$ 的那些项，我们按(5.2.10)将 $\chi^* u^{(\alpha)}$ 写成 $T_{l^{(\alpha)}}\chi^* u + R_\alpha u$，其中 $l^{(\alpha)} \in \Sigma^{|\alpha|}_{\sigma+k-1-\frac{1}{2}}$，$R_\alpha$ 是$\left(\sigma + k - \frac{n}{2} - 1 - |\alpha|\right)$ 正则算子，且 $\sigma = s + k - \frac{1}{2}$. 由 $u \in H^{s+m}$ 可知 $R_\alpha u \in H^{s+1, k+1}$，而且以 $l_j^{(\alpha)}$ 记 $l^{(\alpha)}$的齐 $j$ 次项，对 $T_{l^{(\alpha)}}\chi^* u$，有

$$T_{l^{(\alpha)}}\chi^* u - T_{l_m^{(\alpha)}}\chi^* u + T_{l_{m-1}^{(\alpha)}}\chi^* u \in H^{s+m, k} \subset H^{s+1, k+1},$$

它又可归入余项中. 这样，(5.2.12)就可以写成

$$\sum_{|\alpha|=m} T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}} T_{l_m^{(\alpha)}}\chi^* u + \sum_{|\alpha|=m} T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}} T_{l_{m-1}^{(\alpha)}}\chi^* u$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m-1} T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}} T_{l_{m-1}^{(\alpha)}}\chi^* u = R_2, \tag{5.2.13}$$

其中 $R_2 \in H^{s+1, k+1}$. 由于 $l_m^{(\alpha)}$ 的系数属于$C^{s+k-\frac{n+3}{2}}$，$l_{m-1}^{(\alpha)}$的系数属于 $C^{s+k-\frac{n+5}{2}}$，而 $\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} \in C^{s-\frac{n+1}{2}, k}$ 故由仿微分算子的性质知

$$T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}} T_{l_m^{(\alpha)}}\chi^* u = T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} l_m^{(\alpha)}}\chi^* u + R_3,$$

$$T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}} T_{l_{m-1}^{(\alpha)}}\chi^* u = T_{\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} l_{m-1}^{(\alpha)}}\chi^* u + R_4,$$

且 $R_3$、$R_4$ 均属于 $H^{s+1,k+1}$. 将这些代入(5.2.13)中,即得引理所需的(5.1.11)式. □

现在的问题转变为讨论方程 5.2.11 的解关于曲面 $x_1=0$ 的余法正则性的传播. 于是,可以采用定理 3.3.1 的证明方法来处理它. 仍以 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 分别表示 $x_1\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \cdots, \partial_{x_n}$,则 $T_{p^*}$ 可以写成 $V_i$ 与恒等算子 $I$ 的线性组合.

**引理 5.2.3**　在引理 5.2.2 的条件下

$$T_{p^*}=\sum_{j=1}^{n}T_{B_j}V_j+T_A+Q, \tag{5.2.14}$$

其中 $T_{B_j}$ 和 $T_A$ 是具有 $m-1$ 阶齐次多项式象征的仿微分算子,其象征关于 $x$ 分别属于 $C^{s-\frac{n+5}{2},k+1}$ 类与 $C^{s-\frac{n+7}{2},k+1}$ 类,余项 $Q$ 是从 $H^{s'+m,k'}$ 到 $H^{s'+s-\frac{n+5}{2},k'}$ 的连续映射,这里 $k'\leq k+1$ 为非负整数,$s'$ 为任意实数.

**证明**　由于象征 $p_m^*$ 在 $x_1=0$ 上为零,所以

$$p_m^*=ax_1\xi_1^m+\sum b_{k,\alpha,h}\xi_1^k\xi'^\alpha\xi_n^h, \tag{5.2.15}$$

其中和式是对 $k<m$, $k+|\alpha|+h=m$ 求和. 将 $T_{p_m^*}$ 写成

$$\begin{aligned}T_{p_m^*}&=T_{ax_1}D_1^m+\sum T_{b_{k,\alpha,h}}D_1^kD_{x'}^\alpha D_n^h\\&=T_a(x_1D_1^m)+\sum T_{b_{k,\alpha,h}}D_1^kD_{x'}^\alpha D_n^h\\&\quad+(T_{ax_1}-T_ax_1)D_1^m,\end{aligned}$$

并将 $T_{p^*-p_m^*}$ 归入 $T_A$ 与 $Q$ 中. 由于 $a\in C^{s-\frac{n+3}{2},k}\subset C^{s-\frac{n+5}{2},k+1}$,故 $T_{ax_1}-T_ax_1$ 是 $H^{s'+m,k'}$ 到 $H^{s'+s-\frac{n+5}{2},k'}$ 的连续映射. 又注意到 $b_{k,\alpha,h}$ 与 $a$ 一样,也是 $C^{s-\frac{n+3}{2},k}$ 函数,就得到(5.2.14)式. □

**引理 5.2.4**　设 $B_j(j=1,\cdots,n)$、$A$ 是引理 5.2.3 中所述的具有 $m-1$ 齐次象征的仿微分算子,其象征关于 $x$ 分别为 $C^{\rho+1,k'}$ 与 $C^{\rho,k'}$ 函数 $(\rho>0)$. 记 $\sum_{j=1}^{n}T_{B_j}V_j+T_A$,则对满足 $1\leq|I|\leq k\leq$

$k'$ 的正整数 $k$ 与重指标 $I$，有以下交换子关系式成立：

$$[V^I, P] = \sum_{|J|\leq|I|} T_{B_{J,I}} V_J V^I + R_I. \qquad (5.2.16)$$

**证明**　先设 $k=1$，记 $A=\sum a_\alpha \partial_x^\alpha$，则 $T_A=\sum T_{a_\alpha}\partial_x^\alpha$. 于是

$$\begin{aligned}[V_I, T_A] &= \sum [V_I, T_{a_\alpha}]\partial_x^\alpha + \sum V_{a_\alpha}[V_I, \partial_x^\alpha] \\ &= \sum (T_{V_I a_\alpha} + R_{I,\alpha})\partial_x^\alpha + \sum T_{a_\alpha} H_{I,\alpha},\end{aligned}$$

其中 $R_{I,\alpha}$ 在 $k_1\leq k'$ 时，是从 $H^{s+1,k_1}$ 到 $H^{s+1+\rho,k_1}$ 的连续映射，而 $H_{I,\alpha}$ 是 $m-1$ 阶微分算子，故 $[V_I, T_A]$ 可以归入(5.2.16)右端的 $R_I$ 中. 另一方面，有

$$\begin{aligned}[V_I, T_{B_j}V_j] &= [V_I, T_{B_j}]V_j \\ &= \sum_{|\alpha|=m-1}(T_{V_I, b_{j,\alpha}} + R_{I,j,\alpha})\partial_x^\alpha V_j \\ &\quad + \sum T_{b_{j,\alpha}} H_{I,j,\alpha} V_j \\ &= \sum (T_{V_I, b_{j,\alpha}}\partial_x^\alpha + T_{b_{j,\alpha}} H_{I,j,\alpha}) V_j \\ &\quad + \sum R_{I,j,\alpha}\partial_x^\alpha V_j. \qquad (5.2.17)\end{aligned}$$

由于 $B_j$ 的系数为 $x$ 的 $C^{\rho+1,k'}$ 函数，故在 $k_1\leq k'-1$ 时，$R_{I,j,\alpha}$ 是 $H^{s+1,k_1-1}$ 到 $H^{s+1,k_1}$ 的映射，所以(5.2.17)右端第二项为从 $H^{s+m,k_1}$ 到 $H^{s+1,k_1}$ 的连续映射，而(5.2.17)右端第一项中 $V_j$ 的系数是以

$$\sum ((V_I b_{j,\alpha})\xi^\alpha + b_{j,\alpha} h_{I,j,\alpha})$$

为象征的仿微分算子. 此象征关于 $x$ 属于 $C^{\rho+1,k'+1}$. 由此可见，(5.2.16)在 $k=1$ 时成立.

对于 $k>1$ 的情形，可以用归纳法证明. 其证明过程与定理3.4.1相仿. 所需特别注意的是，对运算过程中诸系数正则性的分析，从而能用仿微分算子理论中已有的定理得到引理的结论. 此处

略去其详.□

**定理 5.2.1 的证明** 首先我们应指出:在引理 5.2.2 的条件下,$\chi^* u \in H^{s+m,k+1}$. 事实上,对任一重指标 $I$,若 $|I| = k+1$,将 $V^I$ 作用于(5.2.11)的两端,有

$$T_{p^*} V^I \chi^* u + [V^I, T_{p^*}]\chi^* u = V^I R. \qquad (5.2.18)$$

取引理 5.2.4 中的 $k'$ 为 $k+1$, $\rho$ 为 $s - \frac{n}{2} - \frac{7}{2}$,由该引理可得

$$T_{p^*} V^I R - \sum_{|J| \leq k-1} T_{B_{J,j}} V_j V^J \chi^* u - R^I \chi^* u, \qquad (5.2.19)$$

且由引理知 $R \in H^{s+1,k+1}$,所以 $V^I R \in H^{s+1}$. 又由引理 5.2.4 知,$R^I$ 是 $H^{s+m,k}$ 到 $H^{s+1,0}$ 的连续映射,故 $R^I \chi^* u \in H^{s+1}$,而 $\sum_{|J| \leq k-1} T_{B_{J,j}} V_j V^J \chi^* u$ 也属于 $H^{s+1}$,所以(5.2.19)右端是 $H^{s+1}$ 函数. 于是,将(5.2.19)视为 $V^I \chi^* u (|I| \leq k+1)$ 的仿微分方程组,它具有相同的主部 $T_{p^*}$,因此,利用仿微分方程的奇性传播定理 5.1.2,可以由 $x_n < 0$ 时的 $V^I \chi^* u \in H^{s+m}$ 推得当 $x_n > 0$ 时这一事实也成立,从而知 $V^I \chi^* u \in H^{s+m,k+1}$.

于是可以交替地使用引理 5.2.1 与刚才的结论,逐次地提高 $\phi$ 的正则性与 $\chi^* u$ 在 $x_1 = 0$ 的切向的正则性. 因为这一论证过程可以无限地继续下去,从而有 $\phi \in H^\infty$ 以及 $\chi^* u \in H^{s+m,\infty}(x_1 = 0)$,所以 $S$ 是 $C^\infty$ 光滑曲面,从而以 $S$ 为基准曲面所定义的余法分布空间 $H^{s+m,k}(S)$ 是有意义的. 此外,由仿复合的基本定理(附录中的定理 A.26)知

$$u \circ \chi = \chi^* u + T_{u' \circ \chi} \chi + R, \qquad (5.2.20)$$

其中 $R$ 在 $\chi \in H^\infty$ 时,$R \in H^\infty$,故可得 $u \in H^{s+m,\infty}(S)$. 这样,就得到了定理 5.2.1 的结论.□

关于完全非线性方程的余法奇性干扰问题,要比半线性的情形复杂得多. 这时已难以证明载有奇性的特征曲面为 $C^\infty$ 的,从而只能递归地定义特征曲面族的切向量场与余法分布空间. 目前仅

对两个载有奇性的特征曲面项相干扰的情形有详细的讨论(见文献[3]).

# 第 6 章

# 非线性方程强奇性的传播

在前几章中讨论非线性偏微分方程解的奇性分析时，总是要求所讨论的解至少是 $H^s\left(s>\frac{n}{2}\right)$ 函数. 若 $\partial^k u$ 作为非线性函数的变元出现在方程中，则还要求 $u\in H^{\frac{n}{2}+k}$. 这主要是为了使出现在方程中的各个非线性函数都有意义. 根据嵌入定理可知这类解必定是连续函数，甚至解的某些导数也是连续的，因此，所讨论的解的奇性是比较弱的. 但是，对于解的更强的奇性的研究也往往是很重要的. 有时，这种强奇性正是我们所关心的主要物理现象. 例如，在空气动力学中，激波、中心波和接触间断是人们最为关心的几种非线性波. 当这些非线性波出现时，方程的解或其导数出现间断，因而其研究也要困难得多.

与解的弱奇性传播问题的研究不同，在讨论解的强奇性传播性质时，一般需要同时考虑解的存在性问题，因此，本章中的讨论常常是具有特定奇性结构的解的构造. 其结论与研究方法更是因问题而异. 在 § 6.1 与 § 6.2 中要分别讨论半线性双曲型方程具有扇状奇性结构与花状奇性结构的解，并分别用分片光滑函数与余法分布来刻画解的正则性. 在 § 6.3 中讨论含更强的奇性的解——$\delta$ 波，主要是对半线性方程进行讨论的. 最后，在 § 6.3 中讨论拟线性方程的间断解. 由于拟线性方程间断解的理论内容丰富，有许多专著对此有系统的讨论，故不在此作详细的讨论了，而仅从奇性分析的角度介绍一些基本概念与现象.

## §6.1 半线性方程具扇状奇性结构的解

本节研究半线性方程具扇状奇性结构的解.如果一个双曲型方程 Cauchy 问题的初始条件在初始平面的某个低一维流形(相对于求解区域,它是低二维流形)上有强间断,则方程的解也可能在一些曲面上出现强间断.由于解在曲面法向的正则性太差,用波前集来描写解的奇性并不合适.这时,可以采用分片光滑函数或余法分布来描写解的奇性.在这一节中,着重介绍一个属于前一种情况的例子.

在 $R^n$ 中考察如下关于 $t$ 的严格双曲型方程组

$$Pu \equiv \left(A_1\partial_t + A_2\partial_x + \sum_{j=3}^{n} A_j\partial_{y_j}\right)u = F(t, x, y, u),$$

(6.1.1)

其中 $A_1,\cdots,A_n$ 均为 $3\times 3$ 对称阵,$F$ 以及所有的系数都是 $C^\infty$ 光滑的,以下简记为 $F(u)$.设 $u$ 的初值给定在 $t=0$ 上,它在一个 $n-2$ 维流形 $\sigma\subset\{t=0\}$ 上有第一类间断.记 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$、$\Sigma_3$ 为过 $\sigma$ 的特征曲面,则有如下定理:

**定理 6.1.1** 在 $\sigma$ 的邻域中存在上述 Cauchy 问题唯一的分片光滑解 $u$,它仅在 $\Sigma_i(i=1, 2, 3)$ 上有第一类间断.

在证明这一定理前,先简述一下证明的思路,然后通过一些引理来实现它.首先不妨设 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$ 分别为过 $\sigma$ 的右侧特征曲面和左侧特征曲面,$\Sigma_3$ 居于两者之中.那末,由双曲型方程的有限传播速度的性质,在 $\Sigma_1$ 的右端与在 $\Sigma_2$ 的左端,方程(6.1.1)的解可作为具有光滑初始资料的 Cauchy 问题的解面得到,因此,问题就化为解一个 Goursat 问题.为了运算方便起见,可通过一个坐标变换,将三个特征曲面展平为 $x=t$, $x=-t$ 与 $x=0$.利用方程与初始资料,可以计算出在 $\sigma$ 上 $u$ 及其各解导数的跳跃量,从而定出 $u$ 在 $\sigma_1$、$\sigma_2$ 上的边值.然后,再通过先验估计与将方程中关于变量 $y$ 的

导数离散化的办法，得到具有指定奇性结构的解的存在性.

先讨论特征曲面的展平. 设 $\Sigma_i$ 的方程是 $x = \psi_i(t, y)$ $(i = 1, 2, 3)$，满足：

$$\begin{aligned} &\psi_2(t,y) < \psi_3(t,y) < \psi_1(t,y), \\ &\partial_t\psi_2(t,y) < \partial_t\psi_3(t,y) < \partial_t\psi_1(t,y). \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

**引理 6.1.1**　存在一个 $C^\infty$ 的可逆变换，它将特征曲面 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$、$\Sigma_3$ 分别变为 $x - t = 0$, $x + t = 0$, $x = 0$.

**证明**　在以下的坐标变换中 $y$ 总保持不变，故在书写中省略关于坐标 $y$ 的变换式. 首先，通过坐标变换

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{1}{2}(\psi_1(t,y) + \psi_2(t,y)), \\ t' &= \frac{1}{2}(\psi_1(t,y) - \psi_2(t,y)), \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

可以将 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$ 分别变成 $x' - t' = 0$, $x' + t' = 0$, 故不妨设 $\psi_1$、$\psi_2$ 已具有 $t$ 与 $-t$ 的形式，且由(6.1.2)知 $|\partial_t\psi_3(x,y)| < 1$.

令

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x),$$

$\Sigma_1$、$\Sigma_2$、$\Sigma_3$ 就变成 $t' = 0$、$x' = 0$ 与

$$F(t', x', y') \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - t') - \psi_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t' + x'), y\right) = 0. \tag{6.1.4}$$

因为 $\dfrac{\partial F}{\partial x'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \partial_t\psi) > 0$, 故 $\Sigma_3$的方程可以写成 $x' = g(t', y)$ 的形式. 作变换

$$t'' = t', \; x'' = \frac{t'}{g(t', y)}x',$$

在 $t' = 0$ 时，后一式用 $x'' = (g_t(0,y))^{-1}x'$ 代替. 于是三个特征曲

面又分别变成 $t''=0$, $x''=0$, $t''=x''$. 最后,利用变换

$$\tilde{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}(t''+x''),\ \tilde{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-t''+x''),$$

$\Sigma_1$、$\Sigma_2$、$\Sigma_3$ 就可变成 $\tilde{t}=\tilde{x}$, $\tilde{t}=-\tilde{x}$, $\tilde{x}=0$ 三个平面. □

以后我们重新记 $\tilde{t}$、$\tilde{x}$为 $t$、$x$. 在新坐标系下所考察的方程组应具有形式:

$$X_l u_l+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} b_{lij}\partial_{y_j}u_i=f_l\ (l=1,2,3),\qquad(6.1.5)$$

其中 $X_l=\partial_t+\lambda_l\partial_x$,且在 $\Sigma_1: x=t$ 上 $\lambda_1=1$;在 $\Sigma_2: x=-t$ 上 $\lambda_2=-1$;在 $\Sigma_3: x=0$ 上 $\lambda_3=0$. 我们仍不妨设初始资料给定在 $t=0$ 上,它在 $\gamma: x=t=0$ 上有间断. 显然,在 $\Sigma_1$ 右边(相应地,在 $\Sigma_2$ 左边)的解可以由 $\gamma$ 右边(相应地,左边)的初值决定.

**引理 6.1.2** 沿着 $\gamma$ 可以由方程(6.1.5)以及在 $t=0$ 上的初始资料决定 $u$ 及所有各阶导数在各个曲面 $\Sigma_l$ 上的间断.

**证明** 以 $[w]_{l,0}$ 记 $w$ 在 $\Sigma_l$ 上的间断于 $t=0$ 时的取值. 又若 $w^0$ 是定义在 $t=0$ 上的函数,以$[w^0]_0$ 记 $w^0$ 在 $x=0$ 上的间断. 以下指出,可以用归纳法来计算所有的导数 $[X^\alpha\partial_y^\beta u_l]_{l',0}$ 的值.

由于在 $y$ 轴上, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ 是所有曲面 $\Sigma_l$ 与 $\gamma$ 的切向,所以关于 $y$ 的求导不会引起任何困难. 为记号简单起见,在以下的讨论中,不妨只考虑 $\beta=0$ 的情形. 先设 $\alpha=0$. 注意,$l\neq l'$ 时, $X_l$与 $\Sigma_{l'}$ 横截,故由方程知 $[u_l]_{l',0}=0$. 至于 $u$ 的其他间断量可以用初值的间断来表示,即

$$[u_l]_{l,0}=[u_l^0]_0.\qquad(6.1.6)$$

现设 $|\alpha|\leq m$ 时所有的 $[X^\alpha u_l]_{l',0}$ 已知,考虑 $|\alpha|=m+1$ 时这些量的计算. 为此将 $[X^\alpha u_l]_{l',0}$ 写成

$$[X^{\alpha_1}X_i u_l]_{l',0},\ \text{其中}\ |\alpha_1|=m.\qquad(6.1.7)$$

以下用"已知项"表示可以由初值决定的间断量,当 $i=l$ 时,

利用方程(6.1.5)就可以将(6.1.7)化成 $m$ 个向量场作用于 $u$ 的情形，从而由归纳法假设知，它可以由初值决定.

当 $i \neq l$ 且 $l \neq l'$ 时，注意到 $X_1$、$X_2$、$X_3$ 三个向量场可以相互线性表示，将 $X^{\alpha_1}X_i$ 中每个因子都用 $X_l$ 与 $X_{l'}$ 的线性组合表示，可得

$$[X^{\alpha_1}X_iu_l]_{l',0} = [aX_{l'}^{m+1}u_l]_{l',0} + [X^{\alpha_2}X_lu_l]_{l',0} + \text{已知项}.$$

因为 $X_{l'}$ 就是 $\Sigma_{l'}$ 的切向，故上式右端都是"已知项".

剩下需估计 $i \neq l$ 且 $l = l'$ 的情形：不妨设 $l = 1$，则有

$$\begin{aligned}[X^{\alpha_1}X_iu_1]_{1,0} = \{X^{\alpha_1}X_iu_1\}_{t=0,\ x=+0} \\ - \{X^{\alpha_1}X_iu_1\}_{t=0,\ x=-0} \\ - [X^{\alpha_1}X_iu_1]_{2,0} - [X^{\alpha_1}X_iu_1]_{3,0}.\end{aligned}$$

右端第一项可利用初始条件与方程决定，第二、三项由前面的讨论也是已知的. □

**引理 6.1.3** 沿 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$ 解 $u$ 及其各阶导数均可由方程组(6.1.5) 以及初始条件定出.

**证明** 利用引理 6.1.2 中所给出的 $u$ 及其各阶导数在原点的间断值，可以决定 $u$ 及其各阶导数在 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$ 上的间断. 下面用归纳法来计算这些量. 与引理 6.1.2 的证明相仿，在此可不必考虑关于变量 $y$ 的导数.

首先，由方程组(6.1.1)知，$u_1$、$u_3$ 关于曲面 $\Sigma_2$ 的横截方向的导数有界，因此

$$[u_1]_{\Sigma_2} = [u_3]_{\Sigma_2} = 0,$$

同理，

$$[u_2]_{\Sigma_1} = [u_3]_{\Sigma_1} = 0.$$

在 $\Sigma_1$ 的两侧考察(6.1.5)中对应于 $l = 1$ 的方程，将它们相减后，可得

$$X_1[u_1]_{\Sigma_1} + \sum b_{11j}\partial_{y_j}[u_1]_{\Sigma_1} = f_1(u|_{\Sigma_1^+}) - f_1(u|_{\Sigma_1^-}).$$
(6.1.8)

显然，$u|_{\Sigma_1^+}$为已知量，而$u|_{\Sigma_1^-} = u|_{\Sigma_1^+} - [u]_{\Sigma_1}$，故(6.1.8)可以视为$[u_1]_{\Sigma_1}$的一个微分方程. 由于$[u_1]_{\Sigma_1}$的初值已知，故在$\sigma$的邻域中，$[u_1]_{\Sigma_1}$沿曲面$\Sigma_1$的值可以通过解方程得到. 用同样方法可计算得$[u_2]_{\Sigma_2}$的值.

设对$l=1,2,3$以及一切满足$|\alpha|\le m$的$\alpha$，$[X^\alpha u_l]_{\Sigma_{1,2}}$已知，则当$l=1,2$；$l'=1,2,3$时，由于

$$[X_l X^\alpha u_{l'}]_{\Sigma_l} = X_l[X^\alpha u_{l'}]_{\Sigma_l},$$

故它们为已知量. 又由方程组(6.1.5)本身可得：对于$l=1,2$以及任意的$l'$，有

$$[X_3X^\alpha u_3]_{\Sigma_l} = [X^\alpha(\sum b_{3ij}\partial_{y_j}u_1)]_{\Sigma_l} + [[X_3,X^\alpha]u_3]_{\Sigma_3},$$

故由归纳法的假设可知，它也是已知量.

由向量场$X_1$、$X_2$、$X_3$的线性独立性，在$l$、$i$、$l'$两两不相等时的间断量$[X_lX^\alpha u_i]_{l'}$总可化成$l=i$或$l=l'$情形下相应间断量的线性组合. 剩下来，只需考虑$[X_1X^\alpha u_2]_{\Sigma_2}$和$[X_2X^\alpha u_1]_{\Sigma_1}$. 在$\Sigma_1$的两侧，将$X_2X^\alpha$作用于(6.1.5)的第一个方程，并作一定的换位运算，再将两侧所得的方程相减，可得

$$X_1[X_2X^\alpha u_1]_{\Sigma_1} + \sum b'_j\partial_{y_j}[X_2X^\alpha u_1]_{\Sigma_1} = \text{已知量}. \quad (6.1.9)$$

现将(6.1.9)视为未知函数$[X_2X^\alpha u_1]_{\Sigma_1}$的微分方程，该未知函数在原点处的初值可由引理6.1.2决定，从而这个间断量沿$\Sigma_1$的值可以通过解微分方程而得到. 同理，$[X_1X^\alpha u_2]_{\Sigma_2}$也可定出. 这样，就得到了当$l=1,2,3$时，$\alpha$满足$|\alpha|=m+1$时所有的$[X^\alpha u_l]_{\Sigma_{1,2}}$. □

以下来建立方程组(6.1.5)的Goursat问题的解的能量不等式，由它可直接导出解的存在性. 为此，引入如下的Sobolev空间，

这样的空间在讨论具有特征边界的边值问题时特别有用，例如见文献[3]和[39]中的应用. 以 $\partial^{s,s'}u$ 记 $\partial^{s}\partial_{T}^{s'}u$，其中 $\partial$ 表示对所有方向的导数，$\partial_{T}$ 表示切向求导算子 $\partial_{t}$、$x\partial_{x}$、$\partial_{y}$，并定义

$$\|u\|_{s,s'}=\Big(\sum_{r\le s,r'\le s'}\|\partial^{r,r'}u\|^{2}\Big)^{1/2},$$

$$\|u\|_{B^{s}}=\sum_{r\le s/2}\|u\|_{r,s-2r},$$

$$\|u\|_{\hat{B}^{s}}=\sum_{r\le s/2}\|u\|_{r+1,s-2r-1},$$

则有如下命题成立：

**引理 6.1.4** 若 $s>n$，则 $B^{s}$ 与 $\hat{B}^{s}$ 在 $C^{\infty}$ 非线性复合下不变.

根据嵌入定理知，当 $s\ge 1$，$s+s'>n/2$ 时，$H^{s,s'}\subset L^{\infty}$，所以，在 $s>n$ 时 $B^{s}\subset L^{\infty}$. 又在文献[100]中证明了 $H^{0,s}\cap L^{\infty}$ 在非线性复合下不变. 又在文献[114]中证明了当 $r>1/2$，$r+(s-2r)>n/2$ 时，$H^{r,s-2r}$ 在非线性复合下不变. 由此可知 $B^{s}$、$\hat{B}^{s}$ 在非线性复合下不变.

**引理 6.1.5** 以 $\Omega_{\tau}$ 记区域 $|x|\le t$，$t\le\tau$. 若 $u$ 是方程组 (6.1.5) 的具有紧支集的解，则对 $s>n$ 有下式成立：

$$\|u_{3}\|_{B^{s}(\Omega_{\tau})}+\|u_{1,2}\|_{\hat{B}^{s}(\Omega_{\tau})}\le C\sum_{t\le s}\|\partial^{t}u\|_{H^{s-t}(\Sigma^{1\tau}\cup\Sigma^{2\tau})}.$$

(6.1.10)

**证明** 在区域 $|x|\le t$ 中引入变换 $x\to -x$，可以将 $\Omega$ 对折成 $\Omega^{+}$ ：$0\le x\le t$，它以 $\Sigma_{1}$、$\Sigma_{3}$ 为边界. 此时，令

$$u_{i+3}(x,t)=u_{i}(-x,t)\quad (i=1,2,3),$$

可得到在 $\Omega^{+}$ 中关于 $U=(u_{1},\cdots,u_{6})^{T}$ 的方程组

$$\tilde{A}U+\sum\tilde{B}_{j}\partial_{y_{j}}U=F, \qquad (6.1.11)$$

其中

$$\widetilde{A}=\operatorname{diag}(X_1, X_2, X_3, X_1', X_2', X_3'),$$

$$X_i'=\partial_t-\lambda_i(t, -x, y)\partial_x \quad (i=1, 2, 3),$$

$\widetilde{B}_j$、$F$ 的表示也容易直接从(6.1.5)导出，至于边界条件，由引理6.1.3，可知道 $U$ 的各个分量和它们所有的导数在边界 $\Sigma_1$ 上的值. 而在 $\Sigma_3$ 上边界条件为

$$u_4-u_1=0, \quad u_5-u_2=0. \tag{6.1.12}$$

导出(6.1.11)的能量不等式的方法是经典的. 记边界 $t=\tau$, $0\leq x\leq t$ 为 $\pi_\tau$，对方程组乘以 $U$，再在 $\Omega^+$ 上进行积分，可得

$$\int_{\pi_\tau}U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\int_{\Omega_\tau^+}(U^2+F^2)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\Sigma_{1\tau}}U^2\mathrm{d}S$$
$$+\int_{\Sigma_{3\tau}}(-u_1^2+u_2^2+u_4^2-u_5^2)\mathrm{d}S. \tag{6.1.13}$$

由边界条件(6.1.12)知上式最后一项积分为零，利用 Gronwall 不等式可知

$$\int_{\pi_\tau}U^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\int_{\Omega_\tau^+}(F^2)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Sigma_{1\tau}}U^2\mathrm{d}S. \tag{6.1.14}$$

由于 $\partial_t$、$x\partial_x$、$\partial_{y_j}$都是关于 $\Sigma_3$ 的切向算子，因此，在 $\Sigma_3$ 上给出的边界条件经过这些微分算子作用后仍然保持，从而，与导出(6.1.14)的方法相同，可以得出

$$\int_{\pi_\tau}(\partial_t^\alpha(x\partial_x)^\gamma\partial_y^\beta U)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\Big(\int_{\Omega_\tau^+}F_1^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\int_{\Sigma_{1\tau}}(\partial_t^\alpha(x\partial_x)^\gamma\partial_y^\beta U)^2\mathrm{d}S\Big), \tag{6.1.15}$$

其中 $F_1$ 满足

$$\int_{\Omega_\tau^+}F_1^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq C(\|F\|_{0,s}^2+\|U\|_{0,s}^2).$$

于是，由(6.1.15)可得

$$\|\partial^{0,s}U\|_{\pi_\tau}^2 \leq C(\|F\|_{H^{0,s}(\Omega_\tau^+)}^2 + \|U\|_{H^{0,s}(\Sigma_\tau)}^2).$$

由于 $X_1$、$X_1'$、$X_2$、$X_2'$ 与 $\Sigma_3$ 横截，故得

$$\begin{aligned}&\|\partial^{1,s-1}u_{1,2,4,5}\|_{\pi_\tau}^2 + \|\partial^{0,s}u_{3,6}\|_{\pi_\tau}^2 \\ &\leq C(\|F\|_{H^{0,s}(\Omega_\tau^+)}^2 + \|U\|_{H^{0,s}(\Sigma_\tau)}^2).\end{aligned} \tag{6.1.16}$$

以下用归纳法证明 $\gamma \geq 1$ 时下面的不等式成立：

$$\begin{aligned}&\|\partial^{r+1,s-2r-1}u_{1,2,4,5}\|_{\pi_\tau}^2 + \|\partial^{r,s-2r}u_{3,6}\|_{\pi_\tau}^2 \\ &\leq C(\|F\|_{H^s(\Omega_\tau^-)}^2 + \|\partial^s U\|_{L^2(\Sigma_\tau)}^2).\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

显然，(6.1.16)说明上式在 $r=0$ 时成立. 现设(6.1.17)对某个满足 $\frac{s}{2}-1 \geq r \geq 0$ 的 $r$ 成立，现证它对 $r+1$ 也成立. 对于满足不等式 $\alpha+\gamma+|\beta| \leq s-2r-2$ 的指标 $(\alpha, \beta, \gamma)$，将算子 $L = X_2^{r+1}\partial^\alpha(x\partial_x)^\gamma\partial_y^\beta$ 作用于方程(6.1.5)的第三式，可得

$$\begin{aligned}&X_3Lu_3 + [L,X_3]u_3 + \sum(b_{33j}\partial_{y_j}Lu_3 + [L,b_{33j}\partial_{y_j}]u_3 \\ &\quad + Lb_{31j}\partial_{y_j}u_1 + Lb_{32j}\partial_{y_j}u_2) = Lf_3.\end{aligned}$$

此式又可写为

$$X_3Lu_3 + \sum b_{33j}\partial_{y_j}Lu_3 + aLu_3 = g, \tag{6.1.18}$$

其中

$$\|g\|_{L^2(\Omega_\tau^+)} \leq C(\|f_3\|_{r+1,s-2r-2} + \|u_{1,2}\|_{r+1,s-2r-1}),$$

因此，用导出(6.1.14)的方法，可得

$$\begin{aligned}\|Lu_3\|_{\pi_\tau}^2 \leq C(&\|f_3\|_{r+1,s-2r-2}^2 + \|u_{1,2}\|_{r+1,s-2r-1}^2 \\ &+ \|\partial^{r+1,s-2r-1}u_3\|_{\Sigma_{1,r}}^2).\end{aligned}$$

于是

$$\| \partial^{r+1,s-2r-2} u_{3,6} \|^2_{\pi_r} \leq C( \| F \|^2_{B^r(\Omega_r^+)} + \| \partial^s U \|^2_{\Sigma_{1r}}). \tag{6.1.19}$$

同样，利用(6.1.5)的第一、二式，可以将 $\| \partial^{r+2,s-2r-3} u_{1,2,4,5} \|^2_{\pi_{1r}}$ 用(6.1.17)的右端来控制，所以在(6.1.17)中，以 $r$ 替换成 $r+1$ 后仍成立，故(6.1.17)对一切 $r$ 均成立.

最后，利用引理 6.1.4，可知在(6.1.17)右端的 $\| F \|_{B^r(\Omega_r^+)}$ 可以用 $\| U \|_{B^r(\Omega_r^+)}$ 控制. 于是(6.1.10)即可得到. □

**定理 6.1.1 的证明** 将方程组(6.1.5)改写为

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_1 u_1 + \sum (A_j)_{12} \partial_{y_j} u_2 + \sum (A_j)_{13} \partial_{y_j} u_3 = f_1(u), \\ &\tilde{X}_2 u_2 + \sum (A_j)_{21} \partial_{y_j} u_1 + \sum (A_j)_{23} \partial_{y_j} u_3 = f_2(u), \\ &\tilde{X}_3 u_3 + \sum (A_j)_{31} \partial_{y_j} u_1 + \sum (A_j)_{32} \partial_{y_j} u_2 = f_3(u), \end{aligned} \tag{6.1.20}$$

式中 $\tilde{X}_i = X_i + \sum (A_j)_{ii} \partial_{y_j}$，$\sum$ 号为关于 $3 \leq j \leq n$ 作和. 将(6.1.20) 中位于 $\tilde{X}_i$之外关于 $y_j$ 的偏导数用差商

$$L_h^{(ik)} u_k(t, x, y) = \sum (A_j)_{ik}(t, x, y) \frac{1}{2h}(u_k(t, x, y + he_j) - u_k(t, x, y - he_j))$$

来代替，则(6.1.5)就变成

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_1 u_1 + L_h^{(12)} u_2 + L_h^{(13)} u_3 = f_1(u), \\ &\tilde{X}_2 u_2 + L_h^{(21)} u_1 + L_h^{(23)} u_3 = f_2(u), \\ &\tilde{X}_3 u_3 + L_h^{(31)} u_1 + L_h^{(32)} u_2 = f_3(u). \end{aligned} \tag{6.1.21}$$

注意，(6.1.21)中的差商都是沿 $y$ 方向作的，所以能够从上面给定的(6.1.5)的 Goursat 问题导出(6.1.21)取同样边值的 Goursat

问题. 由于 $L_h^k + (L_h^k)^*$ 关于 $h$ 一致有界，所以对(6.1.21)的 Goursat 问题的解具有关于 $h$ 为一致的能量估计. 因为(6.1.21)的 Goursat 问题的局部解可以通过特征线法来建立，利用能量估计，就可以从中抽出一个子序列，它在 $h \to 0$ 时收敛于(6.1.5)的解. 这个解当然仍满足引理 6.1.5 中建立的估计.

所考察的边值问题的唯一性是能量不等式的简单推论. □

**定理 6.1.2** 在定理 6.1.1 的假定下，如果初值在 $p \in \sigma$ 为光滑的，则解在过 $p$ 且落在 $\Sigma_i$ 的次特征上为光滑的.

**证明** 我们先就 $i = 1$ 的情形进行考察：首先，通过一个适当的自变量变换与函数变换，方程组(6.1.1)可以写成

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial V}{\partial z_j} = G(V), \tag{6.1.22}$$

其中 $z_1 = 0$ 对应于 $\Sigma_1$, $B_1 = \mathrm{diag}(0, B_1')$, $B_1'$ 为 $(m-1) \times (m-1)$ 满秩矩阵. 将 $(V_2, \cdots, V_n)$ 记为 $V'$，则 $V = (V_1, V')$，而 (6.1.22) 又可写为

$$\begin{aligned} l_1 V_1 &= G_1 - \sum_{k=2}^{m} l_k V_k, \\ \sum_{j=1}^{n} B_j' \frac{\partial V'}{\partial z_j} &= G' - h' V_1, \end{aligned} \tag{6.1.23}$$

其中 $l_k (k \geq 2)$, $h'$ 都是定义在 $z_1 = 0$ 上的微分算子, $l_1 = \sum_{j=2}^{m} (B_j)_{11} \frac{\partial}{\partial z_j}$.

方程组(6.1.22)的特征多项式为 $p(z,\zeta) = \det\left|\sum B_j \zeta_j\right|$，它在 $N^*(\Sigma_1)$ 上的 Hamilton 向量场可以简单地写出来. 事实上，在 $N^*(\Sigma_1)$ 上, $z_1 = 0$, $\zeta_2 = \cdots = \zeta_n = 0$. 利用 $B_1$ 的特殊形式，可知

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta_j} = (B_j)_{11} \det|B_1'|,$$

所以从底空间的 $p$ 点出发并带有特征方向(1,0,…,0)的零次特

征就是向量场 $l_1=\sum(B_j)_{11}\frac{\partial}{\partial z_j}$ 的积分曲线. 以下将它记为 $L_1$.

利用(6.1.23)以及 $V$ 在 $p\in\sigma$ 处的 $C^\infty$ 正则性，容易推得 $V$ 沿曲线 $L_1$ 的 $C^\infty$ 正则性. 事实上，当 $V$ 为(6.1.23)的解时，由于(6.1.23) 中 $B_1'$ 为满秩阵，故 $V'$ 的法向导数可以用函数 $V$ 本身及其切向导数表示之，所以 $V'$ 在 $x_1=0$ 上为 $C^0$. 又由(6.1.23)第一式以及 $V_1$ 在 $p$ 点的正则性可知，$V_1$ 在 $L_1$ 上为 $C^0$. 归纳之，若已知 $V$ 在 $L_1$ 上为 $C^k$ 正则，则由 (6.1.23) 第二式可知 $V'$ 在 $L_1$ 上为 $C^{k+1}$ 正则，而由 (6.1.23) 的第一式以及 $V$ 在 $p$ 点处所满足的初始条件知，$V_1$ 在 $L_1$ 上为 $C^{k+1}$ 正则，所以由归纳法知 $V=(V_1,V')$ 在 $L_1$ 上是 $C^\infty$ 正则的. □

由上述两个定理还可以导出方程(6.1.1)的解的奇性干扰结果.

**定理 6.1.3** 设在 $t<0$ 时有互相分离的特征曲面 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$，它们交于 $t>0$ 区域中的空向曲线 $\gamma$，则有：

(1) 若在 $t<0$ 时 $u$ 仅在 $\Sigma_1$ 上有第一类间断，而在 $\Sigma_1$ 外是光滑的，则 $u$ 的第一类间断将沿 $\Sigma_1$ 延伸到 $t>0$ 区域中.

(2) 若在 $t<0$ 时 $u$ 仅在 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 上有第一类间断，而在此两曲面外是光滑的，则在 $t>0$ 区域中，$u$ 除在 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$ 上有第一类间断外，还可能在过 $\gamma$ 的特征曲面 $\Sigma_3$ 上产生第一类间断型的奇性.

事实上，由于 $\gamma$ 为空向曲线，故通过它可以作一个类空曲面 $\Pi$，然后将 $\Pi$ 展平，就得到一个在定理6.1.1中讨论过的具间断初始值的 Cauchy 问题，于是，利用定理6.1.1即得所需的结论.

上面的讨论说明了，在分片光滑解的框架中，当载有强奇性的特征曲面 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 横截相交时，奇性除了继续沿这两个曲面传播外，还会干扰出额外的奇性，沿另一族特征曲面 $\Sigma_3$ 传播. 在 $2\times 2$ 方程组的情形下，这种干扰现象不会出现. 但是，以上的方法不适合于讨论高于 3 阶的方程组，因为在那时所涉及的特征曲面太多，不可能通过一个变换将这些特征曲面同时展平.

对于一般的 $n\times n$ 方程组，可以用余法分布为工具，研究双曲

型方程组具扇状奇性结构的强奇性解. 例如,G. Metivier 就在余法分布的框架中讨论了含任意个未知函数的双曲型方程组的 Cauchy 问题:

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} u = F(t, x, u),$$
$$u|_{t=0} = g(x), \tag{6.1.24}$$

其中初始资料 $g(x)$在低一维流形 $\sigma$ 上有间断. 记 $\Omega$ 为 $R_+^{n+1}$ 中的开集,它含于 $\Omega \cap \{t=0\}$ 的决定区域中,又记 $\Omega_T = \Omega \cap \{t<T\}$, 则对适当小的 $T$ 有如下的结论:

**定理 6.1.4**　设 $m > \frac{n+5}{2}$, $g \in L^\infty(R^n) \cap H^{0,m}(R^n)$,则在 $\Omega_T \subset R_+^{n+1}$ 中存在Cauchy 问题(6.1.24)的唯一解 $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap H^{0,m}(\Omega_T)$.

这个定理说明了,若初始资料在 $\sigma$ 上有奇性,则奇性沿着过 $\sigma$ 的一切特征曲面传播. 与前相仿,由此还可导出关于奇性干扰的结论,定理 6.1.4 的证明可参见文献[94],此处从略.

## §6.2　半线性方程具花状奇性结构的解

本节考察半线性波动方程具花状奇性结构的解,并用余法分布来描写解的奇性结构. 与第4章中所讨论的问题不同,这里所考察的解具有较强的奇性,故如本章初所述,必须同时考虑解的存在性与正则性.

以下讨论问题

$$\Box u = f(t, x, y, u), \tag{6.2.1}$$

$$u(0, x, y) = 0, \quad u_t(0, x, y) = \phi(x,y), \tag{6.2.2}$$

式中 $\Box = \partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy}$, $f(t, x, y, u)$ 是其变元的 $C^\infty$ 函数,以后也常简记为 $f(u)$. 又函数 $\phi$ 在四个象限中分别取不同的常数,

即

$$\psi(x,y) = c_i, \text{ 在第 } i \text{ 个象限中}.$$

问题(6.2.1)也称为半线性波动方程的高维黎曼问题，这个名称来自于空气动力学方程组的高维黎曼问题.当然，由于空气动力学方程组是拟线性方程组，所以它的高维黎曼问题要困难得多，至今仍是一个悬而未解决的问题.

**定理 6.2.1** 若 $T_0$ 为充分小的正数，则在区域 $0 \leq t \leq T_0$，$-\infty < x, y < +\infty$ 中存在(6.1.1)的 $C^0$ 解 $u$，它在特征曲而 $x = \pm t$，$y = \pm t$ 和过原点的特征锥 $t^2 = x^2 + y^2$ 以外均为 $C^\infty$. $u$ 是关于这些曲而的余法分布，而且 $u$ 确实在这些曲面上有奇性.

定理 6.2.1 的证明也需要先作一些分析与准备.在此先叙述一下证明的思路：设 $v$ 是线性波动方程取初始条件(6.2.2)的解，又以 $E$ 记波动算子取齐次初始条件的逆算子，则问题(6.2.1)、(6.2.2)的解 $u$ 满足

$$u = v + Ef(t, x, y, u). \tag{6.2.3}$$

如果能够找到一个适当的函数空间 $B$，使以下几个事实成立：

(1) $v \in B$；

(2) 若 $u \in B$，则 $Ef(t, x, y, u) \in B$；

(3) 对于充分小的 $T$，映射 $u \to v + Ef(t, x, y, u)$ 是一个内射，且具有某种压缩性.

则方程(6.2.3)解的存在性可以通过迭代法来建立，从而 Cauchy 问题(6.2.1)、(6.2.2)的解也就可得到，而解的奇性结构就由空间 $B$ 的特性所显示.

根据偏微分方程奇性分析的一般结论，解的奇性将出现在由初始资料的奇性发出的特征上.现在初始条件(6.2.2)中函数 $\psi(x, y)$ 的波前集为 $(x, 0; 0, 1)$，$(0, y; 1, 0)$，$(0, 0; \xi, \eta)$，这些波前集所对应的零次特征带集合在底空间 $(t, x, y)$ 上的投影就是

$$x = \pm t, \ y = \pm t, \ t^2 = x^2 + y^2. \tag{6.2.4}$$

上面所提及的空间 $B$ 就将根据这些曲面来构造：$B$ 中的元素是这样的函数，它们关于(6.2.4)中所列出的诸特征曲面有余法正则性，而在这些曲面外它们是 $C^\infty$ 的. 以下将采用 § 3.4中给出的余法分布的定义，但类似于第 4 章中的做法，还需引入关于原点为齐零次的单位分解，从而可以在各个锥邻域中将余法奇性用向量场的作用明显地表现出来.

先构造 $(t,x,y)$ 空间的开锥集覆盖. 记 $\Sigma_1=\{x=t\}$, $\Sigma_2=\{y=t\}$, $\Sigma_3=\{x=-t\}$, $\Sigma_4=\{y=-t\}$, $\Sigma_5=\{t^2=x^2+y^2\}$; $S=\{\Sigma_1,\cdots,\Sigma_5\}$. 并记 $l_i=\Sigma_i\cap\Sigma_5$ $(i=1,2,3,4)$, $l_5=\Sigma_1\cap\Sigma_2$, $l_6=\Sigma_2\cap\Sigma_3$, $l_7=\Sigma_3\cap\Sigma_4$, $l_8=\Sigma_1\cap\Sigma_4$. 设 $\{\omega_j\}$ 是 $R^3_+$ 的有限开锥覆盖，且满足：

(1) 每个 $\omega_j$ 含于顶点在原点，且锥顶角不超过 $\pi/10$ 的圆锥内；

(2) 当 $j\leq 8$ 时, $l_j\subset\omega_j$; 当 $j\neq j'$ 时, $l_j\cap\omega_{j'}=\varnothing$;

(3) 当 $j>8$ 时, $\omega_j$ 至多与 $S$ 中一个曲面相交; 当 $j\leq 8$ 时, $\omega_j$ 与 $S$ 中两个曲面相交.

于是，在每个锥邻域 $\omega_j$ 中，可以找到关于特征曲面集 $S$ 的切向量场系的完备基 $M_1,\cdots,M_l$. 例如，在 $\omega_1$ 中，仅有特征曲面 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_5$ 出现，故这个基可以取为：

$$
\begin{aligned}
&M_0=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y,\\
&M_1=t\partial_x+x\partial_t,\\
&M_2=y(\partial_t+\partial_x)+(t-x)\partial_y.
\end{aligned}
\tag{6.2.5}
$$

在 $\omega_2$、$\omega_3$、$\omega_4$ 中，完备基的选取方法与 $\omega_1$ 中类似，在 $\omega_5$ 中，可选取完备基为：

$$
\begin{aligned}
&M_0=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y,\\
&M_3=(x-y)\partial_t+(t-y)\partial_x+(x-t)\partial_y,\\
&N=t(\partial_t+\partial_x+\partial_y).
\end{aligned}
\tag{6.2.6}
$$

在 $\omega_6$、$\omega_7$、$\omega_8$ 中完备基的选法与 $\omega_5$ 中类似，当 $j>8$ 时，因为 $\omega_j$ 至多与 $S$ 中一个特征曲面相交，故相应的切向量场完备基的构造更简单，读者可自行写出.

从属于开锥覆盖 $\{\omega_j\}$ 可以构造一个相应的单位分解 $\Sigma\chi_i\equiv 1$，其中每个 $\chi_i$ 都是齐零次函数. 余法分布空间 $H^{0,k}$ 将借助于这个单位分解来定义. 首先，在每个锥邻域 $\omega_j$ 中，利用给定的完备向量场基定义 $H^{0,k}$，对于定义在 $R^3_+$ 中的函数 $u$，若对每个 $i$，函数 $\chi_i u\in H^{0,k}(\omega_i)$，则称 $u\in H^{0,k}$. 相应地，余法分布空间 $H^{0,k}$ 的模可以取为：

$$\left(\sum_j\sum_{|\alpha|\le k}\|M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}\cdots M_l^{\alpha_l}(\chi_j u)\|_{L^2(\omega_j\cap C_{T_0})}\right)^{\frac{1}{2}},\qquad(6.2.7)$$

其中 $M_1,\cdots,M_l$ 是在 $\omega_j$ 中相切于 $S$ 的向量场系的基，为记号简单起见，在此省略了指标 $j$. $C_{T_0}$ 为区域 $\{(t-T_0)^2>x^2+y^2,0<t<T_0\}$.

在以下的讨论中，当涉及在此开覆盖的每个锥邻域时，往往取 $\omega_1$ 与 $\omega_5$ 作为两个典型情况来讨论. 因为在其他锥邻域中的讨论，或者是类同的，或者要简单得多.

在此应特别指出：在 $\omega_1$ 中的基向量场(6.2.5)满足与□的交换于关系式，而在 $\omega_5$ 中的基向量场则不然. 事实上，在 $\omega_1$ 中有

$$[M_0,\Box]=2\Box,\ [M_1,\Box]=0,\ [M_2,\Box]=0.\qquad(6.2.8)$$

但在 $\omega_5$ 中，$[N,\Box]=-2\partial_t(\partial_t+\partial_x+\partial_y)$，它不能表示为该锥邻域中的基向量场与□的线性组合. 由于我们考察含强奇性的解，所以第 4 章中的二次微局部分析方法不适用. 幸好，在以 $\omega_5$ 为代表的一类锥邻域中不含算子□的特征方向，因而能找到一些补救办法，详见后面的引理6.2.4.

现在按照前面给出的思路来证明定理6.2.1. 以下取空间 $B$ 为 $L^\infty\cap H^{0,k}$，其中 $k$ 可以是任意给定的正整数.

**引理 6.2.1**　设 $v$ 是线性波动方程满足初始条件(6.2.2)的解，则 $v\in B$.

**证明**　线性波动方程 Cauchy 问题的解 $v$ 可以用初始资料表示为：

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_{r\leq t} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \quad (6.2.9)$$

将 $\psi(x,y)$ 的值代入，即可得到 $v$ 的具体表达式. 易见，$v$ 是 $t$、$x$、$y$ 的齐一次函数，利用表达式的对称性写出它在区域 $x\geq 0$、$y\geq 0$ 中的表示如下：

$$v = \begin{cases} c_1 t, \text{ 若 } x > t,\ y > t; \\ \dfrac{t}{2}(c_1+c_2)+\dfrac{x}{2}(c_1-c_2), \text{ 若 } 0 < x < t,\ y > t; \\ \dfrac{t}{2}(c_1+c_4)+\dfrac{y}{2}(c_1-c_4), \text{ 若 } 0 < y < t.\ x > t; \\ \dfrac{t}{2}(c_2+c_4)+\dfrac{x}{2}(c_1-c_2)+\dfrac{y}{2}(c_1-c_4), \\ \qquad \text{若 } 0 < x < t,\ 0 < y < t,\ t^2 < x^2+y^2; \\ \dfrac{t}{2}(c_2+c_4)+\dfrac{x}{2}(c_1-c_2)+\dfrac{y}{2}(c_1-c_4) \\ +\dfrac{c_1+c_3-c_2-c_4}{2\pi}J(t,x,y), \\ \qquad \text{若 } 0 < x < t,\ 0 < y < t,\ x^2+y^2 < t^2, \end{cases}$$

其中 $J(t, x, y)$

$$= \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{t} \frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{x}{r}-\sin^{-1}\frac{y}{r}\right)r\mathrm{d}r.$$

将(6.2.9)式中积分表示式中的 $\psi$ 替换成 1，该积分具有有限值，所以 $v\in L^\infty$ 是显然的. 又从 $v$ 的表达式可知，$v$ 在 $x^2+y^2=1$ 外是分块线性函数，它在各特征曲面上均连续，而导数有间断. 所需详加考察的就是 $v$ 从特征锥 $t^2=x^2+y^2$ 的内侧趋向锥面时的性态，而这实际上由函数 $J(t,x,y)$ 的性质决定. 记 $J_1(x,y)=J(1, x, y)$，则 $J_1(x,y)$ 又可以写为

$$\int_{x-\sqrt{1-y^2}}^{0}\int_{y-\sqrt{1-(x-\xi)^2}}^{0}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

从而有

$$\frac{\partial J_1}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[J_1(x+\Delta x,y)-J_1(x,y)]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial y}=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-y^2}};$$

$$\frac{\partial^2 J_1}{\partial x\partial y}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

由此可知，$v\in L^\infty$，而且 $v$ 的一阶导数从锥 $t^2=x^2+y^2$ 的内部连续到锥面上. 但 $v$ 的二阶导数在该锥面附近趋于无穷.

为说明 $v$ 是余法型分布，也只需说明 $J(t,\ x,\ y)$ 是余法分布. 易见，

$$J_x=\cos^{-1}\frac{y}{\sqrt{t^2-x^2}},\quad J_y=\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{t^2-y^2}},\qquad(6.2.10)$$

$$J_t=\frac{1}{t}J-\frac{x}{t}J_x-\frac{y}{t}J_y.\qquad(6.2.11)$$

为考察一般切边算子对 $J(t,\ x,\ y)$ 的作用，需要一个引理如下：

**引理 6.2.2** 以 $M$ 记切向量场基(6.2.5)中的任一个，对任意的重指标 $\alpha$ 有下式成立：

$$M^\alpha J=aJ+\sum_{|\beta|<|\alpha|}b_\beta M^\beta J_x+\sum_{|\beta|<|\alpha|}c_\beta M^\beta J_y,\quad(6.2.12)$$

其中 $a$、$b_\beta$、$c_\beta$ 为零次齐次函数.

将引理 6.2.2 的证明暂搁一旁，继续引理 6.2.1 的证明：以下先说明 $J_x(t,\ x,\ y)$、$J_y(t,\ x,\ y)\in H^{0,k}$，以邻域 $\omega_1$ 为例进行讨论，考察(6.2.5)中的切向量场对 $J_x$ 和 $J_y$ 的作用. 由直接的运算

知

$$M_0 J_x = M_1 J_x = 0;$$

$$M_2 J_x = -(t^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}/(t+x);$$

$$M_0 J_y = 0;$$

$$M_1 J_y = t(t^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}/(t^2 - y^2);$$

$$M_2 J_y = y(t^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}/(t^2 - y^2).$$

由于在 $\omega_1$ 中 $t + x \neq 0$，$t^2 - y^2 \neq 0$（原点不属于 $\omega_1$），而所有 $M_i J_x$ 和 $M_i J_y$ 均为齐零次函数，故它们都是 $L^2$ 局部可积的. 又注意 $M_0(t^2 - x^2 - y^2) = 2(t^2 - x^2 - y^2)$，$M_1(t^2 - x^2 - y^2) = 0$，$M_2(t^2 - x^2 - y^2) = 0$，故继续以 $M^\alpha$ 作用于 $M_i J_x$ 与 $M_i J_y$，总可得到在 $\omega_1$ 中不等于零的齐零次函数. 这说明了 $J_x$、$J_y$ 是 $\omega_1$ 中的余法分布.

再利用(6.2.10)即知，对任意的 $\alpha$，有 $M^\alpha J \in L^2_{\text{loc}}(\omega_1)$. 在特征锥上其他点的邻域中的讨论相仿. 所以 $J(t, x, y) \in H^{0,k}$. 于是由前面的说明可知 $v \in H^{0,k}$. □

**引理 6.2.2 的证明** 为证(6.2.12)，用归纳法：当 $|\alpha| = 1$ 时，(6.2.12) 是显然的. 今设该式对 $|\alpha| = k$ 成立，则对于满足 $|\alpha_1| = k+1$ 的 $\alpha_1$，记 $M^{\alpha_1} = M^\alpha M$，有

$$\begin{aligned} M^{\alpha_1} J &= M^\alpha (aJ + bJ_x + cJ_y) \\ &= \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} C_\alpha^\beta ((M^\beta a)(M^{\alpha-\beta} J) \\ &\quad + (M^\beta b)(M^{\alpha-\beta} J_x) + (M^\beta c)(M^{\alpha-\beta} J_y)). \end{aligned}$$

按归纳法的假设，将上式中的 $M^{\alpha-\beta} J$ 用(6.2.12)作代换，就得到 $M^{\alpha_1} J$ 如(6.2.12)式的线性组合表示，且作用于 $J_x$、$J_y$ 的算子的次数不超过 $k$. 又注意，算子 $M_i$ 作用于齐次函数时，不改变其齐次的次数，故得(6.2.12). □

在证明 $Ef\in B$ 时,需用到算子 $M^{\alpha}$ 与 $E$ 的换位,为此,先证明如下引理:

**引理 6.2.3**　设 $\omega$ 是支集在 $t\geq 0$ 上的函数, $M$ 是满足 $[\Box, M]=c_0\Box$ 的向量场,其中 $c_0$ 为常数,则

$$MEw=E(M+c_0)w. \tag{6.2.13}$$

**证明**　利用 $M$ 与 $E$ 的性质,则有

$$\begin{aligned}\Box MEw &= M\Box Ew+c_0\Box Ew\\ &=(M+c_0)w=\Box E(M+c_0)w.\end{aligned}$$

于是,利用波动方程 Cauchy 问题解的唯一性,可知 $MEw$ 与 $E(M+c_0)$ 相等。□

**引理 6.2.4**　设对充分小的 $T_0$, $u\in L^{\infty}\cap H^{0,k}(S, C_{T_0})$,且 $\|u\|_{H^{0,k}(S,C_{T_0})}\leq G$, 则 $Ef(u)$ 也属于 $L^{\infty}\cap H^{0,k}(S, C_{T_0})$, 且 $\|Ef(u)\|_{H^{0,k}(S,C_{T_0})}\leq G$ 成立.

**证明**　$Ef(u)$的有界性可由其显式表达式得知. 事实上,

$$\begin{aligned}|Ef(u)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{r\leq t-\tau}\frac{|f(u(\tau,\xi,\eta))|}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ &\leq C\int_0^t\int_{r\leq t-\tau}\int_0^{2\pi}\frac{r}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau\\ &\leq C\int_0^t -\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}\Big|_0^{t-\tau}\mathrm{d}\tau\\ &\leq C_1.\end{aligned}$$

为证 $Ef(u)$的余法正则性,利用前面作出的开锥覆盖 $\{\omega_j\}$ 与单位分解 $1=\Sigma\chi_j$, 将$Ef(u)$写成$\Sigma E(\chi_j f(u))$. 于是只需对每个 $j$ 证明 $E(\chi_j f(u))\in H^{0,k}$. 实际上仅需考虑 $j=1,5$ 两种情形.

先看 $E(\chi_1 f(u))$,需对每个 $j$ 估计 $\|M^{\alpha}E(\chi_1 f(u))\|_{L^2(\omega_j)}$. 在 $\omega_1$ 中 $M^{\alpha}=M_0^{\alpha_0}M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}$, 由引理 6.2.3 知,对任意满足 $|\alpha|\leq k$ 的 $\alpha$,有

$$M^{\alpha}(E\chi_1 f(u)) = E((M_0+2)^{\alpha_0}M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}(\chi_1 f(u)))$$
$$= E\sum_{\Sigma|\beta_i|\le|\alpha|} g_\beta M^{\beta_0}\chi_1 M^{\beta_1}u\cdots M^{\beta_l}u,$$

其中 $g_\beta$ 与 $M^{\beta_0}\chi_1$ 有界，如引理 3.3.1 的证明中所示，在 $\|u\|_{L^\infty}$ 有界时，$M^{\beta_i}u\in L^{2k/|\beta_i|}$，且

$$\|M^{\beta_i}u\|_{L^{2k/|\beta_i|}(\omega_1\cap C_{T_0})}\le C\|u\|_{H^{0,k}(\omega_1\cap C_{T_0})}, \qquad (6.2.14)$$

于是

$$\|g_\beta M^{\beta_0}\chi_1 M^{\beta_1}u\cdots M^{\beta_l}u\|^2_{L^2(\omega_1\cap C_{T_0})}$$
$$\le C\prod_{i=1}^{l}\|M^{\beta_i}u\|^2_{L^{2k/|\beta_i|}(\omega_1\cap C_{T_0})}$$
$$\le C\|u\|^{2l}_{H^{0,k}(\omega_1\cap C_{T_0})}\le CG^{2l}. \qquad (6.2.15)$$

将此估计与基本解算子 $E$ 所满足的能量估计式

$$\|Ef\|^2_{H^1(C_{T_0})}\le CT_0\|f\|^2_{L^2(C_{T_0})} \qquad (6.2.16)$$

相结合，可得

$$\|M^{\alpha}E(\chi_1 f(u))\|_{L^2(C_{T_0})}\le\|M^{\alpha}E(\chi_1 f(u))\|_{H^1(C_{T_0})}$$
$$\le C(G)T_0^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.2.17)$$

当 $j\ne 1$ 时，可以将 $\omega_j$ 中的切向量场基用 $M_0$、$M_1$、$M_2$ 线性表示. 例如在 $\omega_2$ 中，切向量场基为

$$M_0,\quad M_1'=t\partial_y+y\partial_t,$$
$$M_2'=x(\partial_t+\partial_y)+(t-y)\partial_x,$$

它们可以表示为

$$M_1'=\frac{t}{t-x}M_2-\frac{y}{t-x}M_1,$$

$$M_2'=\frac{x}{t-x}M_2+\frac{t-x-y}{t-x}M_1.$$

在 $\omega_3$ 中,切向量场基为

$$M_0,\quad M_1'' = -t\partial_x - x\partial_t (= -M_1),$$

$$M_2'' = y(\partial_t - \partial_x) + (t+x)\partial_y = \frac{t+x}{t-x}M_2 - \frac{2y}{t-x}M_1,$$

在 $\omega_5$ 中,切向量场基为

$$M_0,\quad M_3 = M_1 - M_2,$$

$$N = \frac{t}{y^2+x^2-t^2}((y+x-t)M_0 + (y+x-t)M_1$$

$$+ (y-x-t)M_2),$$

等等. 注意,在 $\omega_2$、$\omega_3$ 中 $t-x\neq 0$,在 $\omega_5$ 中 $t^2-x^2-y^2\neq 0$,利用这些线性表示以及前面在区域 $\omega_1$ 中那样的论证,可得 $E(\chi_1 f(u))\in H^{0,k}$.

现在再考察 $E(\chi_5 f(u))$ 的余法正则性:先在 $\omega_5$ 中进行考察,首先,$M_0^{\alpha_0}M_3^{\alpha_1}N^{\alpha_2}E(\chi_5 f(u))$ 可写成

$$\sum_{\alpha_2+\beta_0+\beta_1\le|\alpha|} N^{\alpha_2}E(h_\beta M_0^{\beta_0}M_3^{\beta_1}u).$$

当 $\alpha_2=1$ 时,由于基本解算子 $E$ 是 $L^2\to H^1$ 的线性有界算子,故 $E(h_\beta M_0^{\beta_0}M_3^{\beta_1}u)\in H^1$,从而 $N^{\alpha_2}E(h_\beta M_0^{\beta_0}M_3^{\beta_1}u)\in L^2$.

在 $\alpha_2>1$ 的情况下,需作进一步的讨论. 通过直接的运算可以建立恒等式:

$$\begin{aligned}
&2(t-x)(t-y)\square\\
&= (M_0^2 - M_0) - \left(M_3^2 - M_0 - \frac{t-x-y}{t}N\right)\\
&\quad - 2(x+y-t)\left(\frac{NM_0}{t} - \frac{N}{t}\right)\\
&\quad + (t^2-x^2-y^2)\left(\frac{N}{t^2} - \frac{N^2}{t^2}\right).
\end{aligned}\tag{6.2.18}$$

由此有

$$N^2 = a_0(t-x)(t-y)\Box + a_1 M_0^2 + a_2 M_3^2$$
$$+ a_3 N M_0 + b_1 M_0 + b_2 N, \qquad (6.2.19)$$

其中 $a_i$、$b_i$ 是零次齐次函数，并在 $\omega_5$ 中有界，于是记 $\alpha_2 = \alpha_2' + 2$，利用(6.2.17)可以将 $N^{\alpha_2}E(h_\beta M_0^{\beta_0} M_3^{\beta_1} u)$ 写成

$$N^{\alpha_2'} a_4 M_0^{\alpha_0} M_2^{\alpha_1} \chi_5 f(u) + \sum N^{\alpha''_2} E(h_\beta M_0^{\alpha_0} M_2^{\alpha_1} u),$$

其中 $|\alpha_2'| = |\alpha_2| - 2$，$\alpha_2'' < \alpha_2$，$|a_4| = |a_0(t-x)(t-y)| \le CT_0^2$. 继续这一过程，反复利用(6.2.18)，即可将算子 $N$ 的幂次减至 1 或 0，因此，至多再利用一次前面在 $\alpha_2 = 1$ 情形下的结论，就可得到

$$M_0^{\alpha_0} M_3^{\alpha_1} N^{\alpha_2} E(\chi_5 f(u)) \in L^2(\omega_5). \qquad (6.2.20)$$

注意，在 $j \ne 5$ 时，向量场 $M_0$、$M_3$、$N$ 也能生成各个 $\omega_j$ 中的切向量场基，就可断定 $E(\chi_5 f(u)) \in H^{0,k}$ 以及相应的能量估计式：

$$\| E(\chi_5 f(u)) \|_{H^{0,k}(C_{T_0})} \le C(G) T_0^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.2.21)$$

我们再次强调，以上取 $\chi_j$ 为 $\chi_1$、$\chi_5$ 是考虑了两种典型的情形，其他情形可以类推，或者要简单得多. 故引理得证. □

**引理 6.2.5**　映射 $F[u] = v + Ef(u)$ 是 $L^\infty \cap H^{0,k}$ 中的压缩映射.

**证明**　利用 $E$ 的 Poisson 积分表示，在 $T_0$ 充分小时，有

$$\begin{aligned}
\| F[u] - F[w] \|_{L^\infty} &= \| E(f(u) - f(w)) \|_{L^\infty} \\
&\le CT_0 \| f(u) - f(w) \|_{L^\infty} \\
&\le CT_0 \| f' \|_{L^\infty} \| u - w \|_{L^\infty} \\
&\le \frac{1}{2} \| u - w \|_{L^\infty}. \qquad (6.2.22)
\end{aligned}$$

为估计 $F[u] - F[w]$ 的 $H^{0,k}$ 模，我们写出

$$\| F[u] - F[w] \|^2_{H^{0,k}}$$

$$= \sum_j \sum_{|\alpha| \le k} \| M^\alpha (E\chi_j (f(u) - f(w))) \|^2_{L^2}. \qquad (6.2.23)$$

如前，在此也仅考察 $j = 1$、5 的情形：又如同引理6.2.4证明中的说明，在 $j = 1$ 的情形，可取切向量场系为(6.2.5)，而在 $j = 5$ 的情形，取切向量场系为(6.2.6).

根据(6.2.8)式与引理6.2.3，有

$$\sum_{|\alpha| \le k} \| M^\alpha (E\chi_1 (f(u) - f(w))) \|_{L^2(C_{T_0})}$$

$$\le C \sum_{|\alpha| \le k} \| EM^\alpha (\chi_1 (f(u) - f(w))) \|_{L^2(C_{T_0})}$$

$$\le CT_0^{\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha| \le k} \| M^\alpha (f(u) - f(w)) \|_{L^2(C_{T_0})}.$$

此外，通过简单的运算，有

$$\| M^\alpha (f(u) - f(w)) \|_{L^2}$$

$$\le \sum_{l \le k} ( \| f^{(l)}(u) - f^{(l)}(w) \|_{L^\infty} \| M^{\alpha_1} u \cdots M^{(\alpha_l)} u \|_{L^2}$$

$$+ \| f^{(l)}(w) \|_{L^\infty} \| M^{\alpha_1} w \cdots M^{\alpha_l} (u - w) \|_{L^2}$$

$$\le C \| u - w \|_{L^\infty \cap H^{0,k}}.$$

故

$$\| E(\chi_1 (f(u) - f(w))) \|_{H^{0,k}} \leqslant CT_0^{\frac{1}{2}} \| u - w \|_{L^\infty \cap H^{0,k}}. \qquad (6.2.24)$$

当 $j = 5$ 时，与引理 6.2.4 的证明相仿，利用(6.2.19)式，可以将表达式

$$M_0^{\alpha_0} M_3^{\alpha_1} N^{\alpha_2} E(\chi_5 (f(u) - f(w)))$$

中的算子 $N$ 的幂次降低，最终导致 $N$ 的幂次仅为 1 或 0 的情形. 而算子 $M_0$、$M_3$ 可以和基本解算子 $E$ 交换. 再利用算子 $E$ 所满足的基本能量估计(6.2.16)，即得

$$\| E(\chi_5(f(u) - f(w))) \|_{H^{0,k}} \leq CT_0^{\frac{1}{2}} \| u - w \|_{L^\infty \cap H^{0,k}}. \tag{6.2.25}$$

结合(6.2.24),并注意到 $\chi_1$、$\chi_5$ 的代表性,就得到 $T_0$ 充分小时算子 $F$ 的压缩性. □

**定理 6.2.1 的证明** 有了以上的准备,就可以构造如下的序列$\{u_n\}$:

$$u_0 = v,\ u_{n+1} = v + Ef(u_n). \tag{6.2.26}$$

引理 6.2.1 与引理 6.2.4 说明了序列$\{u_n\}$能够确切地定义,引理 6.2.5说明了该序列在 $L^\infty \cap H^{0,k}$ 中收敛,其极限 $u$ 就是具有定理中所述的余法正则性的解. 它在诸特征曲面(6.2.4)以外是 $C^\infty$的. 注意,(6.2.3)是问题(6.2.1)和(6.2.2)的一个等价形式,故算子 $F$ 的压缩性也就保证了在 $L^\infty \cap H^{0,k}$ 中解的唯一性.

最后,我们指出解 $u$ 的奇性确实在诸特征曲面(6.2.4)上出现,为此,以下说明与线性问题的解 $v$ 相比,$Ef(u)$的奇性仅含有较弱的奇性.

在 $\Sigma_i(1 \leq i \leq 4)$ 上,函数 $v$ 连续,面一阶导数间断,所以在 $\Sigma_i$ 附近 $v$ 的二阶导数为支集在 $\Sigma_i$ 上的 $\delta$ 函数,它当然不是 $H^2_{\text{loc}}$ 函数. 又在 $\Sigma_5$ 上,$v$ 与它的一阶导数连续,但二阶导数按 $d^{-\frac{1}{2}}$的奇性趋于无穷,这里 $d$ 为点到曲面 $\Sigma_5$ 的距离,故 $v$ 在 $\Sigma_5$ 附近也不是 $H^2_{\text{loc}}$函数. 另一方面,由于 $f(u) \in L^\infty$,故 $Ef(u) \in H^1_{\text{loc}}$,所以 $u = v + Ef(u) \in H^1_{\text{loc}}$. 面这又可导致 $f(u) \in H^1_{\text{loc}}$与 $Ef(u) \in H^2_{\text{loc}}$,所以在 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_5$ 上,$v$ 的奇性比$Ef(u)$的奇性更强,故它们的和 $v + Ef(u)$ 在这些特征曲面上具有和 $v$ 同样强度的奇性. 于是定理 6.2.1的结论全部获证. □

**注** 上面的方法也可以应用于讨论一般的半线性方程具花状奇性结构的解. 但那时特征曲面都是弯曲的,因面在通过变换将过原点的特征锥面拉直后,还需要对低阶项作细致的处理,详见文献[56],又当初始条件中函数 $u$ 本身的初值有间断时,则 Cauchy 问

题的解也会有更强的奇性，对这种情形的讨论可参见文献[68].

## §6.3 半线性方程的 $\delta$ 波

本节讨论非线性方程具有更强奇性的解.例如，对于一个非线性双曲型方程的 Cauchy 问题，当初始资料含有像 $\delta$ 函数这样强的奇性时，在以后的时刻奇性怎样传播?这类问题的物理意义是很清楚的，因为 $\delta$ 函数是支集很小的峰值函数的一种理想化的抽象.对这类奇性传播的研究将有助于了解脉冲波的传播过程.由于 $\delta$ 函数本身可以理解为线性泛函，所以在线性方程的奇性分析中，允许像 $\delta$ 函数或更强奇性的分布解出现，一般并不引起新的困难.但在非线性问题中，将不可避免地会遇到分布的非线性运算问题，所以在研究非线性方程这类强奇性解时，首先应将解的含义作确切的解释.

在此先讨论一个空间变数的情形，所讨论的 Cauchy 问题为:

$$\begin{cases}(\partial_t+A(t,x)\partial_x+B(t,x))u = f(t, x, u); \\ u|_{t=0}= g,\end{cases} \tag{6.3.1}$$

其中 $A$、$B$ 都是以 $C^\infty$ 函数为元素的 $N\times N$ 矩阵，$A$ 具有 $N$ 个两两互异的实特征根，$f$ 是其变元的 $C^\infty$ 向量函数，与前面的作法相仿，将它简记为 $f(u)$. 若(6.3.1)中的初始资料 $g=\bar{g}+\mu$，其中 $\bar{g}\in L^1$，而 $\mu$ 为一个奇异测度，则解 $u$ 应该如何定义？它有什么样的性质?

显然，由于 $u$ 的初值含有奇异测度，应该预期 $u$ 在 $t>0$ 时也是含奇异测度的分布.一般来说，非线性函数 $f(u)$ 就不一定有意义.例如，当奇异测度为 $\delta$ 函数，而 $f(u)=u^2$ 时，$f(u)$ 的确定就涉及 $\delta$ 函数的乘法，而这正是一个困难的基本问题.以下不从一般的角度来讨论广义函数的乘法或非线性复合，而仍在 Schwartz 分布的框架下，通过弱极限来给出解的定义.

通过一个未知函数的变换，可以将(6.3.1)中的 $A$ 化成对角

阵：

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1(t,x),\cdots,\lambda_k(t,x)),$$

故以下不妨设 $A$ 已具有对角阵的形式，并先考虑 $B=0$ 的情形：

记 $g_\epsilon = \overline{g} + \mu_\epsilon$ 为初始资料 $g$ 的正则化，相应于(6.3.1)的正则化问题为

$$\begin{cases}(\partial_t + \Lambda(t,x)\partial_x)u_\epsilon = f(t,x,u_\epsilon);\\ u_\epsilon|_{t=0} = g_\epsilon,\end{cases} \tag{6.3.2}$$

为描述解 $u_\epsilon$ 在 $\epsilon\to 0$ 时的性态，我们写出几个 Cauchy 问题如下：

$$\begin{cases}(\partial_t + \Lambda(t,x)\partial_x)\overline{u} = f(t,x,\overline{u});\\ \overline{u}|_{t=0} = \overline{g},\end{cases} \tag{6.3.3}$$

$$\begin{cases}(\partial_t + \Lambda(t,x)\partial_x)\sigma_\epsilon = 0;\\ \sigma_\epsilon|_{t=0} = \mu_\epsilon,\end{cases} \tag{6.3.4}$$

$$\begin{cases}(\partial_t + \Lambda(t,x)\partial_x)\sigma = 0;\\ \sigma|_{t=0} = \mu.\end{cases} \tag{6.3.5}$$

以 $R$ 记 $t=0$，$-N\leq x\leq N$ 的决定区域，$R_t$ 为使 $(x,t)\in R$ 的点 $x$ 的集合. 则有如下定理：

**定理 6.3.1** 设 $f(t,x,u)$关于 $u$ 为整体 Lipschitz 函数，且满足次线性条件：

$$\lim_{|s|\to 0}\frac{f(t,x,s)}{|s|} = 0, \tag{6.3.6}$$

又设 $\overline{g}\in L^1(R_0)$，$\mu_\epsilon$ 在 $L^1(R_0)$中一致有界，$\mu_\epsilon$ 按 Schwartz 分布的意义收敛于 $\mu$，又按测度收敛于零，则对问题(6.3.2)、(6.3.3)、(6.3.4)的解有

$$\lim_{\epsilon\to\infty}(u_\epsilon - \overline{u} - \sigma_\epsilon)\to 0 \tag{6.3.7}$$

在 $C([0,T],L^1(R_t))$中成立. $u_\epsilon$ 按分布意义收敛于 $\overline{u}+\sigma$.

根据定理 6.3.1,有理由将 $\overline{u}+\sigma$ 视为非线性问题(6.3.1)的解.它是线性方程具强奇性初始资料(6.3.5)的解 $\sigma$ 与非线性方程具 $L^1$ 初始资料的 Cauchy 问题(6.3.3)的解 $\overline{u}$ 的和,所以也可以将定理 6.3.1 视为非线性问题(6.3.1)的*叠加原理*.但须说明,在上面的叙述中,$\sigma_\varepsilon\to\sigma$ 与 $u_\varepsilon-\overline{u}-\sigma_\varepsilon\to 0$ 的极限意义是不同的.定理 6.3.1 的证明依赖于如下的引理:

**引理 6.3.1** 设 $F(x,w)$定义于 $\Omega\times R^n$ 上,$F$ 关于 $\omega$ 为一致 Lipshitz 连续:

$$|F(x,w)-F(x,w')|\le K|w-w'|, \qquad (6.3.8)$$

$F$ 又满足(6.3.6)所示的次线性条件.若 $v_\varepsilon$、$v$ 为 $L^1(\Omega)$中的有界序列,$v_\varepsilon$ 按测度收敛于 $v$,则 $F(x,v_\varepsilon)$在 $L^1$ 中收敛于 $F(x,v)$.

**证明** 对任意给定的 $\eta>0$,有

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega|F(x,v_\varepsilon(x))-F(x,v(x))|\mathrm{d}x\le\eta, \quad (6.3.9)$$

记

$$G^\varepsilon=\left\{x\in\Omega;|v_\varepsilon-v|\ge\frac{\eta}{2K}\mathrm{meas}(\Omega)\right\},$$

则由 $F$ 的 Lipschitz 连续性,有

$$\int_{\Omega\setminus G^\varepsilon}|F(x,v_\varepsilon)-F(x,v)|\mathrm{d}x$$

$$\le K\int_{\Omega\setminus G^\varepsilon}|v_\varepsilon-v|\mathrm{d}x\le\eta/2,$$

因为 $v_\varepsilon$ 按测度收敛于 $v$,故 $\varepsilon\to 0$ 时,$G^\varepsilon$ 的测度 $\mathrm{meas}(G^\varepsilon)$收敛于零.又因为 $F$ 是次线性的,故 $F(x,v)\in L^1$.于是,当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\int_{G^\varepsilon}|F(x,v)|\mathrm{d}x=o(1)$.这样,只要能证明

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_{G^\varepsilon}|F(x,v_\varepsilon(x))|\mathrm{d}x\le\eta/2, \qquad (6.3.10)$$

则引理就获证.

为证(6.3.10)，取 $M > \sup\int|v_\varepsilon|\mathrm{d}x$ 与 $r > 0$，使得 $|w| \geq r$ 时，几乎处处有

$$\frac{|F(x,w)|}{|w|} \leq \frac{\eta}{2M}.$$

于是，记 $E^\varepsilon = \{x;\ |v_\varepsilon(x)| > r\}$，有

$$\int_{G^\varepsilon \cap E^\varepsilon} |F(x,v_\varepsilon)|\mathrm{d}x \leq \frac{\eta}{2M}\int_{G^\varepsilon \cap E^\varepsilon} |v_\varepsilon|\mathrm{d}x \leq \frac{\eta}{2}.$$

另一方面

$$\int_{G^\varepsilon \cap (\Omega \setminus E^\varepsilon)} |F(x,v_\varepsilon)|\mathrm{d}x \leq (\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega \times \{|w|<r\}} |F|)\mathrm{meas}(G^\varepsilon) = o(1),$$

从面引理得证. □

**定理 6.3.1 的证明**　如前，仍记

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon - \bar{u} - \sigma_\varepsilon,\ L = \partial_t + \Lambda\partial_x,$$

略去 $f$ 的变元中的 $t$、$x$，则有

$$\begin{aligned} Lv_\varepsilon &= f(u_\varepsilon) - f(\bar{u}) \\ &= (f(v_\varepsilon + \bar{u} + \sigma_\varepsilon) - f(\bar{u} + \sigma_\varepsilon)) \\ &\quad + (f(\bar{u} + \sigma_\varepsilon) - f(\bar{u})). \end{aligned}$$

易见，$v_\varepsilon \in C([0,T],\ L^1(R_t))$，且满足

$$|Lv_\varepsilon| \leq c|v_\varepsilon| + |f(\bar{u} + \sigma_\varepsilon) - f(\bar{u})| \qquad (6.3.11)$$

以及齐次初始条件. 注意，$\sigma_\varepsilon$ 满足 $L\sigma_\varepsilon = 0$，故 $\sigma_\varepsilon$ 的各个分量在相应的特征线上为常数，从而由 $\sigma_\varepsilon$ 的初值 $\mu_\varepsilon$ 按测度趋于零，可知 $\sigma_\varepsilon$ 也按测度趋于零. 又由于 $\mu_\varepsilon$ 在 $L^1(R_0)$ 中一致有界，故 $\bar{u} + \sigma_\varepsilon$ 在 $L^1(R_t)$ 中一致有界. 于是应用引理 6.3.1，可得

$$\int_{R_t} |f(\bar{u} + \sigma_\varepsilon) - f(\bar{u})|\mathrm{d}x = o(1) \qquad (6.3.12)$$

关于 $t$ 一致地成立. 利用(6.3.10)、(6.3.11)以及 Gronwall 不等

式,即可得

$$\| v_\varepsilon \|_{C([0,T];L^1(R_t))} = o(1).$$

这就是(6.3.7)式. 又知 $\sigma_\varepsilon$ 按分布意义收敛于 $\sigma$,所以 $u_\varepsilon$ 按分布意义收敛于 $\bar{u}+\sigma$. □

对于 $B\neq 0$ 的情形,将 $B$ 分解成对角阵 $D$ 与对角元均为零的矩阵 $E$ 之和. 我们将看到,当 $\mu_\varepsilon \to \mu$ 时,$u_\varepsilon \to \bar{u}+\sigma$, 其中 $\bar{u}$ 与 $\sigma$ 分别满足

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + D)\sigma = 0, \quad \sigma|_{t=0} = \mu, \tag{6.3.13}$$

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + B)\bar{u} + E\sigma = f(t, x, \bar{u}), \quad \bar{u}|_{t=0} = g, \tag{6.3.14}$$

与 $B=0$ 的情形不同,这里由第一个线性方程所决定的奇性部分成为第二个非线性方程的外力项,对正则部分 $\bar{u}$ 产生影响. 更确切地,有如下定理:

**定理 6.3.2** 设 $f(t, x, u)$ 满足定理 6.3.1 中所述的条件,$u_\varepsilon$、$\sigma_\varepsilon$、$\alpha_\varepsilon$ 分别是下面 Cauchy 问题的解:

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + B)u_\varepsilon = f(t, x, u_\varepsilon), \quad u_\varepsilon|_{t=0} = g + \mu_\varepsilon; \tag{6.3.15}$$

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + D)\sigma_\varepsilon = 0, \quad \sigma_\varepsilon|_{t=0} = \mu_\varepsilon; \tag{6.3.16}$$

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + B)\alpha_\varepsilon + E\sigma_\varepsilon = f(t, x, \alpha_\varepsilon), \quad \alpha_\varepsilon|_{t=0} = g, \tag{6.3.17}$$

其中 $g\in L^1(R_0)$, $\mu_\varepsilon$ 在 $L^1(R_0)$ 中一致有界, 且按测度收敛于零,则当 $\varepsilon\to 0$ 时, $u_\varepsilon - \alpha_\varepsilon - \sigma_\varepsilon$ 在 $C([0, T]; L^1(R_t))$ 中收敛于零. 此外,若 $\varepsilon\to 0$ 时 $\mu_\varepsilon\to\mu$,则 $\alpha_\varepsilon\to\bar{u}$ 在 $C([0, T], L^1(R_t))$ 中成立,且按分布意义, $u_\varepsilon\to\bar{u}+\sigma$.

为证明上述定理,首先引入一个引理如下:

**引理 6.3.2** 在定理 6.3.2 的条件下,由 (6.3.16) 所决定的 $\{\alpha_\varepsilon\}$ 是 $C([0, T]; L^1(R_t))$ 中的准紧集.

**证明** 定义 $w_\varepsilon$、$\zeta$ 分别为下面线性问题的解：

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + D)w_\varepsilon + E\sigma_\varepsilon = 0, \quad w_\varepsilon|_{t=0} = g; \tag{6.3.18}$$

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + D)\zeta = 0, \quad \zeta|_{t=0} = g, \tag{6.3.19}$$

则 $\zeta \in C([0, T]; L^1(R_t))$，且 $w^\varepsilon - \zeta$ 满足：

$$(\partial_t + \Lambda\partial_x + D)(w_\varepsilon - \zeta) + E\sigma_\varepsilon = 0$$

以及齐次初始条件. 于是$(w_\varepsilon - \zeta)_i$ 可以表示为 $\sum_{j\neq i} e_{ij}\sigma_{\varepsilon j}$ 在第 $i$ 族后向特征线上的积分. 由方程 (6.3.15) 知在第 $i$ 族特征线上的任意点 $p$，有

$$\sigma_{\varepsilon j}(p) = a_j(p)\mu_{\varepsilon j}(\eta_j(p)),$$

其中 $\eta_j(p)$是过 $p$ 点的第 $j$ 族特征线与 $x$ 轴的交点，而 $a_j$ 满足

$$(\partial_t + \lambda_j\partial_x + d_{jj})a_j = 0, \; a_j|_{t=0} = 1,$$

因为 $A$、$B$ 都是连续函数，故上面出现的 $\lambda_j$、$e_{ij}$、$\eta_j$、$a_j$ 也都连续. 于是对每个 $i$，$(w_\varepsilon - \zeta)_i$ 可以写成

$$(w_\varepsilon - \zeta)_i(t,x) = \sum_{j\neq i}\int_{\eta_i(t,x)}^{\eta_j(t,x)} G_{ij}(t, x, y)\mu_{\varepsilon j}(y)\mathrm{d}y, \tag{6.3.20}$$

其中 $G_{ij}$为连续函数，所以$\{(w_\varepsilon - \zeta)(t)\}$ 为$C([0, T]; L^1(R_t))$ 中一致有界与等度连续的集合. 因为 $\zeta$ 是一个固定的函数，故$\{w_\varepsilon\}$为准紧集.

令 $z_\varepsilon = \alpha_\varepsilon - w_\varepsilon$，则

$$Lz_\varepsilon + Ew_\varepsilon = f(w_\varepsilon + z_\varepsilon), \; z_\varepsilon|_{t=0} = 0. \tag{6.3.21}$$

将(6.3.20)视为 $w_\varepsilon$ 到 $z_\varepsilon$ 的一个映射 $\mathscr{P}$，它是$C([0, T]; L^1(R_t))$上的连续映射，所以$\{z_\varepsilon\}$是$C([0, T]; L^1(R_t))$的准紧集，故$\{\alpha_\varepsilon\}$也是如此. □

**定理 6.3.2 的证明** 记 $L = \partial_t + \Lambda\partial_x + B$，$v_\varepsilon = u_\varepsilon - \alpha_\varepsilon - \sigma_\varepsilon$，则

$$
\begin{aligned}
Lv_\varepsilon &= Lu_\varepsilon - L\alpha_\varepsilon - L\sigma_\varepsilon \\
&= f(u_\varepsilon) - f(\alpha_\varepsilon) \\
&= f(v_\varepsilon + \alpha_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) - f(\alpha_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) \\
&\quad + f(\alpha_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) - f(\alpha_\varepsilon),
\end{aligned}
$$

所以

$$
|Lv_\varepsilon| \leq C|v_\varepsilon| + |f(\alpha_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) - f(\alpha_\varepsilon)|, \quad (6.3.22)
$$

且 $v_\varepsilon$ 在 $t = 0$ 时为零. 与定理 6.3.1 的证明相仿，只要能够证明

$$
\| f(\alpha_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) - f(\alpha_\varepsilon) \|_{L^1(R)} = o(1),
$$

就能推得 $u_\varepsilon - \alpha_\varepsilon - \sigma_\varepsilon$ 在 $C([0, T]; L^1(R_t))$中收敛于零. 由于 $f$ 是 Lipshitz 连续函数，故由引理 6.3.1 可知，证明 $\| f(\alpha_\varepsilon + \sigma_\varepsilon) - f(\alpha_\varepsilon) \| = o(1)$ 的关键在于$\{\alpha_\varepsilon\}$在 $L^1(R)$中一致有界，而这一点可由引理 6.3.2 的结论推得.

当 $\mu_\varepsilon \to \mu$ 按分布意义成立时，因为 $D$ 是对角阵，故有 $\sigma_\varepsilon \to \sigma$. 由 (6.3.17) 知 $w_\varepsilon$ 按分布意义收敛于 $w$，其中 $w$ 为问题

$$
(\partial_t + \Lambda\partial_x + D)w + E\sigma = 0, \quad w|_{t=0} = g \quad (6.3.23)
$$

的解. 但由于$\{w_\varepsilon\}$是$C([0, T]; L^1(R_t))$中的准紧集，故 $w_\varepsilon \to w$ 也在 $C([0, T]; L^1(R_t))$ 中成立. 利用引理 6.3.2 中引入的 $\mathscr{P}$ 是连续映射的性质，可知 $z_\varepsilon = \mathscr{P}w_\varepsilon$ 以及 $\alpha_\varepsilon = z_\varepsilon + w_\varepsilon$ 均在 $C([0, T]; L^1(R_t))$ 中收敛，并由 (6.3.13) 的唯一性可知 $\alpha_\varepsilon \to \bar{u}$. □

从定理 6.3.1 与定理 6.3.2 的证明过程来看，为得到近似解 $u_\varepsilon$ 在 $\varepsilon \to 0$ 的收敛性，对非线性函数 $f(u)$增长性的限制是很重要的. 对 $f(u)$的次线性的约束，使得 $u_\varepsilon$ 出现类似于 $\delta$ 函数这种峰值函数时，$f(u_\varepsilon)$仍在 $C([0, T]; L^1(R_t))$中有界. 如果允许 $u_\varepsilon$ 的奇性部分有更高的增长阶，那么对 $f$ 的限制也要更严格，直至要求 $f(u)$ 有界. 读者可参见文献[118]、[104]、[74]中的讨论. 此外，在文献[54]、[74]、[69]中也讨论了高维半线性波动方程的 $\delta$ 波的传播与干扰问题. 得到与定理 6.3.1 类似的非线性叠加原理，

即非线性问题的解可以视为具正则初始资料的非线性问题的解与具奇异初始资料的线性问题的解的叠加. 详见原文.

## §6.4 拟线性方程的强奇性解

与半线性方程的情形相比,拟线性方程强奇性解的研究更困难,其主要原因是由于方程的特征与解有关. 在第5章中讨论拟线性方程的弱奇性解时,已经说明了特征与解有关的事实在奇性分析中所导致的复杂性. 当允许解有间断或更强的奇性时,所遇到的困难将更多.

首先让我们考察如下的一阶拟线性方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{6.4.1}$$

虽然用经典方法或仿线性化方法可以讨论解的弱奇性的传播,但是仅讨论方程 (6.4.1) 的弱奇性解是远远不够的,因为这个方程的光滑解随着时间的推移有可能产生出强奇性. 例如,考察该方程的 Cauchy 问题,并设解 $u$ 的初值取为

$$u(0,x) = \phi(x),$$

于是在解 $u$ 的正则区域内,$u$ 在每一条特征线 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u$ 上取常值. 可是,在 $x$ 轴上若有两点 $\xi_1$、$\xi_2$ 使 $\xi_1 < \xi_2$,且 $\phi(\xi_1) > \phi(\xi_2)$,那么,过 $(0,\ \xi_1)$、$(0,\ \xi_2)$ 两点的特征线就必定相交. 事实上,很容易算出这个交点 $P$ 的坐标为 $\left(\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)},\ \dfrac{\phi(\xi_1)\xi_2 - \xi_1\phi(\xi_2)}{\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)}\right)$,在 $P$ 点解 $u$ 不可能同时取值为 $\phi(\xi_1)$ 与 $\phi(\xi_2)$,因此,解 $u$ 的连续区域不可能延拓到 $P$ 点. 也就是说,若不限于在 $t = 0$ 的邻域中考察上述 Cauchy 问题,就必须允许解含有间断或其他类型的奇性. 这一现象在拟线性方程,特别是拟线性双曲型方程的研究中有一定的普遍性,更由于拟线性方程的间断解一般都有明确的物理背景,所以对它的研究很受人们重视.

对于方程(6.4.1)的解 $u$ 来说，若 $u$ 在曲线 $l$ 上有跳跃间断，且 $l$ 与 $x$ 轴横截，$\partial u/\partial x$ 就是支集在 $\Gamma$ 上的 $\delta$ 函数. 由于 $u$ 与 $\partial u/\partial x$ 在 $\Gamma$ 的任意点上的波前集可以在相反方向上出现，故 $u$ 与 $\partial u/\partial x$ 的乘积就不能利用定理 2.1.4 来定义. 一种合理的对于解的方法来自于方程的物理背景，就是代替 (6.4.1) 而考虑方程

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \tag{6.4.2}$$

它称为具守恒律形式的方程. 方程 (6.4.1) 与 (6.4.2) 的 $C^1$ 解是等价的，但方程 (6.4.2) 的间断解较容易定义. 事实上，对于一个具有跳跃间断的 $L^\infty$ 函数 $u$ 来说，$u^2$ 可按经典意义定义，然后，即使 (6.4.2) 中的导数按分布导数的意义来理解，$u$ 满足方程仍可有确切的含义. 此外，可以直接将 (6.4.2) 化成积分的形式. 若函数 $u \in L^\infty$，且对任意的 $C_0^\infty$ 函数 $\phi$，满足

$$\iint\left(u\,\phi_t + \frac{u^2}{2}\,\phi_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \tag{6.4.3}$$

则称 $u$ 为(6.4.2)的解. 相应地，(6.4.2)满足初始条件

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{6.4.4}$$

的解可以用积分式

$$\iint_{t\geq 0}\left(u\,\phi_t + \frac{u^2}{2}\,\phi_x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t=0} u_0\phi\mathrm{d}x = 0 \tag{6.4.5}$$

来定义，其中 $\phi$ 是在 $t \geq 0$ 中的 $C_0^\infty$ 函数，且具有有界支集. 容易证明，当 $u \in C^1$ 为 (6.4.5) 的解时，它必满足 (6.4.2) 与 (6.4.4)，反之亦然.

对于一般的守恒律方程组

$$u_t + (f(u))_x = 0, \tag{6.4.6}$$

取初始条件(6.4.4)的 Cauchy 问题，它的解可以用下式：

$$\iint_{t\geq 0}(u\,\phi_t + f(u)\,\phi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t=0} u_0\phi\,\mathrm{d}x = 0 \quad (6.4.7)$$

来定义. 当 $u$ 在 $\Gamma: x = x(t)$ 上有跳跃时,以$[u]$、$[f(u)]$分别记 $u$、$f(u)$在 $\Gamma$ 上的跳跃度,则从(6.4.6)通过分部积分,可得

$$\int_\Gamma - \phi[u]\mathrm{d}x + \phi[f(u)]\mathrm{d}t = 0.$$

由于 $\phi$ 是任意函数,故在 $\Gamma$ 上的任一点都有

$$s[u] = [f(u)], \quad (6.4.8)$$

其中 $[u] = u_r - u_l = u(x(t)+0,t) - u(x(t)-0)$,

$$[f(u)] = f(u_r) - f(u_l),$$

$s$ 为曲线 $\Gamma$ 的斜率$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,等式(6.4.8)也称为 Rankine-Hugoniot 条件.

方程(6.4.6)的特征线的斜率为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'(u)$. 当 $f''\neq 0$ 时,只要 $u_r \neq u_l$,就有 $s \neq f(u_r)$, $s \neq f(u_l)$, 所以,拟线性方程(6.4.5)间断解的间断线不同于间断线两侧函数值所决定的特征线. 这一事实与半线性方程奇性传播或拟线性方程弱奇性传播的特点不同. 对于半线性方程来说,由于方程的系数不依赖于 $u$,故强间断解的间断线仍为特征线. 例如对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a(x)u)}{\partial x} = 0 \quad (6.4.9)$$

来说,它的 Rankine-Hugoniot 条件为

$$s = \frac{[a(x)u]}{[u]}. \quad (6.4.10)$$

这个分式右端的值为 $a(x)$,它说明间断线的斜率为 $a(x)$,所以间断线就是特征线. 当然,对于拟线性方程来说,比强间断这样的强度为弱的奇性一般仍沿特征线传播.

注意，由同一个拟线性方程可以写出许多不同的守恒律形式，例如，由(6.4.1)除了可以写出(6.4.2)的形式外，还可以写出

$$\frac{1}{2}\partial_t(u^2)+\frac{1}{3}\partial_x(u^3)=0, \tag{6.4.11}$$

若仅限于考虑连续可微解，(6.4.2)与(6.4.11)是等价的. 但是，对于(6.4.11)的间断解，在间断线上应当满足的 Rankine-Hugoniot 条件为

$$s\,\frac{1}{2}[u^2]+\frac{1}{3}[u^3]=0, \tag{6.4.12}$$

它显然与(6.4.8)不同，所以(6.4.11)的间断解与(6.4.2)的间断解不等价. 故必须先选定一个守恒律的形式，才能讨论拟线性方程的间断解. 由于最有应用价值的拟线性双曲型方程(组)都有其物理背景，它们由相应的物理守恒律导出，因此，作为方程的守恒律形式实际上是确定了的.

在研究拟线性方程的间断解时，还会遇到由不唯一性所导致的麻烦，为说明这一点，考察方程(6.4.2)满足初始条件

$$u(x,0)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 1, & x>0\end{cases} \tag{6.4.13}$$

的 Cauchy 问题，对于这个问题，函数

$$u_1(x,t)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 1, & x>0\end{cases} \tag{6.4.14}$$

在 $x=0$ 外满足方程(6.4.2)与初始条件，并在间断线上满足 Rankine-Hugoniot 条件. 此外，函数

$$u_2(x,t)=\begin{cases}-1, & x<-t;\\ x/t, & -t\le x\le t;\\ 1, & x>t.\end{cases} \tag{6.4.15}$$

也在 $t>0$ 的区域中满足(6.4.2)，并在 $t=0$ 上满足初始条件. 事实上，还可以写出无穷多个含有间断的函数，它们在间断线外满足方程与初始条件，而在间断线上满足 Rankine-Hugoniot 条件. 为了保证解的唯一性，必须确定一个准则，依据它可以从这些解中挑选出唯一的一个解. 这个准则就是在解发生间断的间断线上，除了 Rankine-Hugoniot 条件之外，解还必须满足熵条件. 在方程(6.4.2) 的情形，熵条件就是：

$$\frac{u(x+a,t)-u(x,t)}{a}\leq\frac{E}{t},\ a>0,\ t>0,\quad(6.4.16)$$

其中 $E$ 与 $x$、$t$、$a$ 无关. 这一条件也等价于：通过间断线上任一点，往间断线两侧所作出的特征线都必须是向下的.

对于拟线性双曲型方程组，在讨论它包含跳跃间断的强奇性解时，方程组的守恒律形式与间断线上的熵条件也是必须考虑的. 由于拟线性双曲型方程组在物理上有广泛的应用，因此对于它的研究，特别是对于其强奇性解的研究吸引了许多数学家的注意力，多年来已建立了系统的理论，并发展成为一个重要的数学分支. 由于已有的成果与方法十分丰富，我们不可能在很短的篇幅中，对整个研究情况作概括的介绍. 下面仅从奇性分析的角度，介绍几个最重要的结果.

在区域 $\Omega\subset R^2$ 中，讨论一般的守恒律双曲组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0,\quad(6.4.17)$$

其中 $u$、$f(u)$均为 $N$ 维向量函数，$f(u)$的各个分量均为 $u$ 的 $C^\infty$ 函数. 矩阵 $f'(u)$ 具有 $N$ 个两两互异的实根 $\lambda_1(u)<\cdots<\lambda_N(u)$. 对应于第 $i$ 个特征向量 $\lambda_i(u)$，记 $r_i(u)$为右特征向量，$l_i(u)$为左特征向量，如果在所讨论的区域中，$\nabla\lambda_k\cdot r_k\neq0$，则称第 $k$ 族特征是真正非线性的. 又若 $\nabla\lambda_k\cdot r_k\equiv0$，则称第 $k$ 族特征是线性退化的.

**定义 6.4.1** 若 $C^\infty$ 函数 $w(u)$在所考察的区域内满足：

$$\langle r_k(u), \nabla w(u)\rangle = 0, \tag{6.4.18}$$

则称 $w(u)$ 为第 $k$ 类 Riemann 不变量. 若在某区域内函数 $u$ 使第 $k$ 类 Riemann 不变量为常数，则称 $u$ 为第 $k$ 类单波，又若单波是 $\frac{x-x_0}{t-t_0}$ 的函数，则称 $u$ 为中心单波.

**定义 6.4.2**　设 $\Gamma$ 为 $\Omega$ 中的光滑曲线，函数 $u$ 在 $\Omega\backslash\Gamma$ 上满足方程(6.4.17)，而在 $\Gamma$ 上有跳跃间断，在 $\Gamma$ 上每一点，$\Gamma$ 的斜率 $s$ 与两侧的 $u_r$、$u_l$ 满足

$$f(u_r) - f(u_l) = s(u_r - u_l) \tag{6.4.19}$$

以及

$$\lambda_{k-1}(u_l) < s < \lambda_k(u_l), \quad \lambda_k(u_r) < s < \lambda_{k+1}(u_r), \tag{6.4.20}$$

则称 $\Gamma$ 为第 $k$ 类激波，以上的(6.4.19)式称为 Rankine-Hugoniot 条件，(6.4.20)式称为熵条件.

**定义 6.4.3**　设 $\Gamma$ 为 $\Omega$ 中的光滑曲线，函数 $u$ 在 $\Omega\backslash\Gamma$ 上满足方程(6.4.15)，在 $\Gamma$ 上有跳跃间断，$\Gamma$ 为对应于 $\lambda_k(u_r)$ 与 $\lambda_k(u_l)$ 的特征，则称 $\Gamma$ 为第 $k$ 类接触间断.

需指出的是：第 $k$ 类接触间断仅在方程组的第 $k$ 类特征为线性退化时可能出现，而第 $k$ 类激波只在方程的第 $k$ 类特征为真正非线性时可能出现.

考察方程组(6.4.17)的 Cauchy 问题，如果初始资料含有跳跃间断这样的强奇性. 则解也可能出现跳跃间断. 当初始资料取为

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l, & x < 0; \\ u_r, & x > 0 \end{cases} \tag{6.4.21}$$

时，相应的 Cauchy 问题称为 Riemann 问题. 对此已有如下的结果(参见文献[125]).

**定理 6.4.1**　设方程组 (6.4.17) 是严格双曲的，其各族特征或为真正非线性的，或为线性退化的. 初始资料 (6.4.21) 中

$|u_r - u_l|$ 充分小，则该 Cauchy 问题在 $t > 0$ 区域中有自模解存在，这个解包含由原点发出的至多 $N$ 个非线性波：激波、中心波与接触间断. 在这些非线性波之间的解为常态.

注意，接触间断线本身就是特征线，此外，中心波的首尾是中心波与常态区域相连接之处，在那里解的导数可能发生间断，由于中心波的首尾都是特征线，故从奇性分析的角度来理解定理 6.4.1，则此定理说明初始资料在原点的强奇性，将沿着过原点的激波或特征线而传播，形成扇形的图象.

定理 6.4.1 的证明可参见文献[125].

如果将初始资料取为较一般的具跳跃间断的函数

$$u(x,0) = \begin{cases} u_-(x), & x_- < x < 0; \\ u_+(x), & x_+ > x > 0, \end{cases} \tag{6.4.22}$$

在区域

$$T(\delta) = \{(t,x); 0 \le t \le \delta,\ x_- + At \le x \le x_+ - At\}$$

中考察方程组(6.4.17)，其中 $A > \sup(|\lambda_k(u)|)$，则当该资料在原点的跃度充分小时，有局部解存在性的结果.

**定理 6.4.2** 设方程组(6.4.17)是严格双曲型的，其各族特征或为真正非线性的，或为线性退化的. 在初始资料(6.4.22)中 $u_-(x)$、$u_+(x) \in C^{2,1}$，$|u_r - u_l|$ 充分小，则存在 $\delta_0 > 0$，使得该 Cauchy 问题在区域 $T(\delta_0)$ 中有 $L^\infty$ 解存在，这个解包含由原点发出的至多 $N$ 个非线性波：激波、中心波与接触间断，在这些非线性波之间的解属于 $C^{2,1}$.

定理 6.4.2 的证明可参见文献[89].

以上述结果为出发点，自然可以有许多进一步的研究，例如解的整体存在性、唯一性、渐近性质等等，对于各类带有低阶项的方程组或非严格双曲型方程组的研究等等. 在此不一一例举这些结果了，而转向高维情形的讨论.

在空间维数为 2 中的守恒律方程组可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}+\frac{\partial g(u)}{\partial y}=0, \tag{6.4.23}$$

考察其初始条件为

$$u|_{t=0}=u_0(x,y) \tag{6.4.24}$$

的 Cauchy 问题，当初始资料 $u_0(x, y)$在 $xOy$ 平面的曲线 $\Gamma: x=\phi(y)$ 上有间断时，则在一定的条件下，可以得到含激波解或含中心波解的局部存在性.

**定理 6.4.3** 对于 Cauchy 问题(6.4.23)、(6.4.24)，如果其系数与初始资料满足：

(1) $f(u)$、$g(u)$为变元的 $C^\infty$ 函数，方程组(6.4.21)为严格双曲，且存在一个正定对称阵 $A_0(u)$，使 $A_0(u)f'(u)$、$A_0(u)g'(u)$均为对称阵；

(2) $u_0^-(x,y)$、$u_0^+(x,y)$ 在 $\Gamma$ 的左右侧分别属于 $H^{s+1}$，其中 $s\geq 2\left[\frac{n}{2}\right]+7$；

(3) 以 $\alpha$ 记曲线 $\Gamma$ 的参数，存在 $\sigma(\alpha)\in H^{s+1}(\Gamma)$ 使在 $\Gamma$ 上

$$\begin{aligned}&-\sigma(\alpha)(u_{0+}(\alpha)-u_{0-}(\alpha))\\&+n_x(\alpha)(f(u_{0+}(\alpha))-f(u_{0-}(\alpha)))\\&+n_y(\alpha)(g(u_{0+}(\alpha))-g(u_{0-}(\alpha)))=0,\end{aligned} \tag{6.4.25}$$

且在 $\Gamma$ 上直至 $s-1$ 阶相容性条件满足. 又存在正整数 $p$，使

$$\lambda_p(u_{0-}(\alpha))>\sigma(\alpha)>\lambda_p(u_{0+}(\alpha)),$$

$$\lambda_{p+1}(u_{0+}(\alpha))>\sigma(\alpha)>\lambda_{p-1}(u_{0-}(\alpha));$$

(4) 在 $\Gamma$ 上，对一切 $\alpha$，由 $(u_{0+}(\alpha), u_{0-}(\alpha), \sigma(\alpha))$ 所定义的常系数初值问题是一致稳定的.

则对充分小的 $T$，在 $0<t<T$ 区域中，存在 $H^{s+1}$ 曲面 $S$，以及在 $S$ 两侧定义的 $H^s$ 函数 $u_-(t, x, y)$ 和 $u_+(t, x, y)$，满足方程 (6.4.23) 和初始条件 (6.4.24)，并在 $S$ 上满足 Rankine-

Hugoniot 条件和熵条件.

在以上定理的叙述中,相容性条件是指通过方程与初始条件所决定的 $u_\pm$ 的各阶导数满足由激波条件(6.4.25)求导后所得到的等式. 一致稳定条件是由 A. Majda 引入的,它与通常的双曲型方程组初始边值问题所应满足的 Lopatinski 条件相当,详见文献[90].

定理 6.4.3 说明在取特定的间断初始值的初始条件下,初始资料中的奇性仅沿过 $\Gamma$ 的一个激波曲面传播. 从奇性传播的角度考虑问题,在文献[46]中证明了如下定理:

**定理 6.4.4** 设 $u$ 是区域 $\Omega$ 中方程组(6.4.17)具有激波 $S$ 的解,$\Omega$ 位于 $\Omega_- = \Omega \cap \{t=0\}$ 的决定区域中. 对于某个 $s > \frac{1}{2}$,$S$ 为 $H^{s+1}$ 曲面,在 $S$ 的两侧 $u_\pm \in H^s$. 若在 $\Omega_-$ 上,$S$ 为 $C^\infty$ 曲面,$u_\pm$ 为 $C^\infty$ 函数,则在整个 $\Omega$ 中,$S$ 为 $C^\infty$ 曲面,且 $u_\pm \in C^\infty$.

下面考察具高维中心波的解,首先对这类解的特性给予描述:对于形为(6.4.23)与(6.4.24)的 Cauchy 问题,设 $\lambda(u,\eta)$ 是 $f'(u)+\eta g'(u)$ 的单特征值,且方程关于该特征值是真正非线性的. 根据在 $\Gamma$ 的右侧与左侧 $u$ 的初值,可以决定过 $\Gamma$ 的两个特征曲面 $\pi_\pm : x = \psi_\pm(t,y)$. 中心波解就是指这样的函数 $u(t,x,y)$,它在 $t \geq 0$ 上除 $\Gamma$ 外连续,在 $t>0$ 区域中除 $\pi_\pm$ 外有连续导数,且满足方程(6.4.23),又在 $t=0$ 上取初值 $u_0(x,y)$. 因为 $\pi_\pm$ 是特征曲面,故有下式成立:

$$(\psi_\pm)_t(t,y) = \lambda(u_\pm(t,\psi_\pm(t,y),y), -(\psi_\pm)_y(t,y)), \tag{6.4.26}$$

$u$ 在 $\Gamma$ 上不连续,因而过 $\Gamma$ 可以作一族特征曲面 $s(t,x,y)=\text{const}$,在每个特征曲面上 $u$ 是连续的,当 $u$ 沿着不同的特征曲面趋于 $\Gamma$ 时,取不同的极限值.

根据上面所描述的 $u$ 的特性,可以将 $u$ 写成 $H(s(t,x,y),t,x,y)$,由于 $s(t,x,y)=$ 常数,都过 $\Gamma$,故 $\nabla s$ 在 $\Gamma$ 附近无界,从而必须有

$$(s_t + A_1 s_x + A_2 s_y)H'_s = 0.$$

由此又可得 $H'_s$ 为矩阵 $A_1 s_x + A_2 s_y$ 的右特征向量 $r$，所以，若 $h(s, y)$是

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = r(h, -\phi'_0(y)), \quad h(0, y) = u_0^+(\phi_0(y), y) \tag{6.4.27}$$

的解，则有 $H(s, 0, 0, y) = h(0, y)$.

对于给定的初值(6.4.24)，为寻求中心波解，并使它能通过特征曲面 $\pi_-$ 与 $u_-(t, x, y)$衔接起来，就要求存在 $s(y) \in C^\infty$，使得

$$h(s(y), y) = u_0^-(\phi_0(y), y), \tag{6.4.28}$$

这也称为*相容性条件*. 又若由方程(6.4.23)、初始条件(6.4.24)以及相容性条件 (6.4.28)，可以在 $\Gamma$ 附近决定各分块光滑区域中的 $u$ 直至其 $k$ 阶导数的值，使得按这些值能决定一个渐近解，在误差为 $O(t^{k+1})$ 的意义下，满足 (6.4.23) 与 (6.4.24)，则称满足 *$k$ 阶相容性条件*.

**定理 6.4.5** 对于 Cauchy 问题(6.4.23)、(6.4.24)，如果其系数与初始资料满足：

(1) $f(u)$、$g(u)$为变元的 $C^\infty$ 函数，方程组(6.4.23)为严格双曲型的，且存在一个正定对称阵 $A_0(u)$，使 $A_0(u)f'(u)$、$A_0(u)g'(u)$均为对称阵；

(2) $u_0^-(x, y)$、$u_0^+(x, y)$在 $\Gamma$ 的左右侧分别属于 $H^s$，其中 $s$ 是满足 $s > \frac{1}{2}(n+3)$ 的最小偶数；

(3) 在 $\Gamma$ 上(6.4.28)以及直至 $k$ 阶相容性条件满足，$k \geq s + d + 5$，其中 $d$ 是某个根据方程系数决定的正数.

则在 $\Gamma$ 的邻域中存在该 Cauchy 问题的中心波解.

在上述定理中，常数 $d$ 的决定可参见文献[4].

定理 6.4.5 也说明了在取特定的间断初始值的初始条件下，初始资料中的奇性可沿着过 $\Gamma$ 的两个特征曲面传播，但奇性减

弱.

如果高维拟线性方程组是严格双曲型的，又是对其每个特征都是真正非线性的，那么，对于具一般间断初始值的 Cauchy 问题，局部地存在含有激波与中心波的强奇性解. 这些强奇性构成一个扇状的奇性结构，见文献[15]、[87].

如果 Cauchy 问题的初值不具有强间断，但在初始平面的曲线 $\Gamma$ 上导数有间断(或某个高阶导数有间断)，那么，奇性就将沿过 $\Gamma$ 的特征曲面传播. 于是能够证明在 $\Gamma$ 的邻域中解的存在性、这个解在 $\Gamma$ 的邻域中连续，而它的导数可能在由 $\Gamma$ 发出的特征曲面上有间断. 这种奇性波(这类解一般不属于 $H^{n/2}$)通常称之为声波. 相应地，也可以建立类似于 §3.4、§3.5 中的结果：单个声波可沿着特征曲面从 $t<t_0$ 区域传播到 $t>t_0$ 区域中，两个声波相交时，它们继续沿着原来所属的特征曲面传播. 如果方程组还含有其他的特征，则从交线发出的其他特征曲面也可能载有声波并传播. 在文献[98]、[58]、[121]中对此作了详细的分析.

但是，若方程组含有线性退化的特征，求具有间断初始值 Cauchy 问题的解时，就涉及高维接触间断波的产生与传播. 目前，即使对仅含单个接触间断波的情形，局部解的存在性与稳定性也都尚不清楚，所以在高维情形下，并无相当于定理 6.4.2 那样的一般性结果. 令人关心的是一些最有实际意义的拟线性双曲型方程组恰恰是含有线性退化特征的，因此，即使在对拟线性双曲组具有扇状奇性结构的强奇性解的研究来说，仍有一些重要而基本的问题尚未解决.

对于拟线性双曲型方程组具有花状奇性结构解的研究就更困难了，例如，若初始条件(6.4.24)中函数 $u_0(x, y)$ 在四个象限中分别取不同值的常数，这样的问题称为高维 Riemann 问题. 本书在 §6.2 中曾讨论了半线性方程的高维 Riemann 问题，可是，在拟线性的情形，若方程是严格双曲型方程，至今尚未见到任何结果. 但是这类问题在物理上却是常遇到的，例如在研究复杂外形物体的绕流、激波反射与绕射等问题时，都可能遇到具有花状奇性结构的

解.我们相信这类问题的研究不久将会迅速发展起来,并吸引众多的数学家投入研究之中.

# 第 7 章

# 拟线性方程激波的形成

在前几章中所讨论的都是偏微分方程解的已生成的奇性的传播,但另一方面,对于非线性方程来说,即使解在初始时刻为充分光滑的,其后也可以有新的奇性形成与发展,因此这一演变过程使人们更感兴趣,在本章中将讨论这种现象,主要讨论拟线性方程激波的形成.

## §7.1 单个方程的情形

### 一、光滑解破裂的两种机制

非线性方程的光滑解随着时间的发展会产生奇性,这是非线性方程区别于线性方程的特有现象. 在一阶方程(或方程组)的情形,奇性的形成可以有两种原因:一种是解的函数值无限地增大,另一种是解本身虽然有界,但解的导数值趋于无穷. 由光滑解发展出奇性的现象简称为*解的破裂*. 下面以两个例子说明之.

考察一阶半线性方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = u^2; \\ u(0,\ x) = u_0(x), \end{cases} \tag{7.1.1}$$

其中 $u_0(x)$ 为光滑函数. 由第 1 章的讨论知,在 $t=0$ 附近该 Cauchy 问题有光滑解存在,它的解可以明显地表示为

$$u(t,\ x) = \frac{u_0(x-t)}{1-tu_0(x-t)}. \tag{7.1.2}$$

易见，若初始资料 $u_0$ 在某点 $\xi$ 大于零，则沿着特征线 $x-t=\xi$，解 $u(t,x)$ 的值在 $t$ 增大时，将无限地增大，直至 $t=\dfrac{1}{u_0(\xi)}$ 时解不再存在. 于是，在 $(t,x)$ 平面上出现一条曲线 $tu_0(x-t)=1$，使光滑解的存在区域不能超越此线. 取 $M=\max u_0(\xi)$，则 Cauchy 问题 (7.1.1) 的整体光滑解只能在 $t<M^{-1}$ 时存在. 这种由解本身的值无限增大而导致光滑解破裂的现象与常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$ 的初值问题的解破裂的现象是相仿的，故称为**常微机制**.

然而，也存在另一种导致光滑解破裂的机制，例如考察一阶拟线性方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=0;\\[2ex] u(0,x)=u_0(x).\end{cases}\tag{7.1.3}$$

设 $f(u)$、$u_0(x)$ 都是其变元的光滑函数，则在 $t=0$ 附近该问题的解可以用特征线法来确定. 由于解 $u$ 在每一条特征线上取常值，故只要函数 $u_0(x)$ 有界，$u$ 的取值就是有界的. 但是，若 $f''(u)>0$，而 $u_0(x)$ 下降，则 $u$ 的导数可以随着时间的增加而趋于无穷.

将方程 (7.1.3) 关于变量 $x$ 求导，可得

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+f'(u)\frac{\partial u_x}{\partial x}=-f''(u)u_x^2.$$

记 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 为沿特征线 $x=x(t)$ 求导，即有

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=-f''(u)u_x^2,$$

积分之，可得

$$\frac{1}{u_x}-\left(\frac{1}{u_x}\right)_0=\int_0^t f''(u)\mathrm{d}\tau,$$

于是

$$u_x(x(t),t)=\frac{u_0'(x(0))}{1+u_0'(x(0))\displaystyle\int_0^t f''(u)\mathrm{d}\tau}.\tag{7.1.4}$$

易见，若 $f''(u)>0$, $u_0'(x(0))<0$，则在 $t$ 增加时，(7.1.4)右端分式的分母值减少，故 $|u_x|$ 的值可以沿特征线无限地增长，所以在 $f''(u)>0$ 的条件下，只要 $u_0'(\xi)<0$，就存在 $t(\xi)$，使之沿着过 $(0,\xi)$ 点的特征线，$u$ 的导数在 $t\to t(\xi)$ 时趋于无穷. 记 $t^*=\min t(\xi)$，则 Cauchy 问题的整体光滑解只能在 $t<t^*$ 中存在. 显然，相应于 $t^*$，有一条特征线 $\gamma: x=x(t)$，使解 $u$ 的导数沿 $\gamma$ 在 $t\to t^*$ 时趋于无穷. 又记 $x^*=x(t^*)$，则 $(t^*, x^*)$ 就给出了光滑解开始破裂的时间与位置.

在上面这种情形，解破裂时由于特征线挤到一起而导致 $u$ 的导数趋于无穷，故也称为光滑解破裂的*几何机制*. 易见，由于半线性方程的特征线的位置不依赖于解，故特征线挤压的情形不可能出现，从而由几何机制所引起的光滑解的破裂，在半线性方程的情形不可能出现. 反之，对拟线性方程的 Cauchy 问题来说，若方程为非齐次，则上述两种机制都可能导致光滑解的破裂.

在此有必要指出，对于 Cauchy 问题(7.1.3)来说，并不可能出现解本身及其一阶导数有界，而高阶导数趋于无穷的情形. 以二阶导数为例，若对方程(7.1.3)再求一次导数，可得

$$\frac{\partial u_{xx}}{\partial t}+f'(u)\frac{\partial u_{xx}}{\partial x}+3f''(u)u_x u_{xx}=-f^{(3)}(u)u_x^3. \tag{7.1.5}$$

显见，这是一个关于 $u_{xx}$ 的一阶线性方程，若 $u$、$u_x$ 有界，则所有系数以及右端项都是有界的. 于是，只要 $u_{xx}$ 在初始时刻有界，它在有限时间内就不会趋于无穷.

以上的讨论虽然只是对一阶非线性方程进行的，但人们预期，对高阶方程来说，使光滑解破裂的机制也是这两种. 若方程为 $m$ 阶，则常微机制对应于解的低于 $m$ 阶的导数趋于无穷；相应地，几何机制对应于解的所有低阶导数有界，而 $m$ 阶导数趋于无穷. 在本章中，我们更感兴趣于讨论光滑解破裂的几何机制，特别是在光滑解破裂后，如何从破裂点开始构造该方程含奇性的解.

## 二、激波的构造

前面的讨论说明了问题(7.1.3)的光滑解从$(t^*, x^*)$开始破裂，然而还可进一步指出，从$(t^*, x^*)$点开始将产生一个激波，且随着时间$t$的增加，激波的强度也从零开始而逐步增强. 下面就构造一个解$u(t, x)$，它在$t < t^*$时为$C^1$解，在$t > t^*$时，$u$在曲线$L: x = s(t)$的两侧仍连续，但在$L$上有间断，并满足Hugoniot条件，而曲线$L$的起点就是$(t^*, x^*)$. 以下先叙述解的构造过程，然后再写出解的存在性定理，并给出严格的证明.

简记$g(y) = f'(u_0(y))$，以特征线与$x$轴的交点$y$为参数，则特征线族可表示为

$$x = y + tg(y). \tag{7.1.6}$$

记过$(t, x)$点的特征线与$x$轴的交点为$y(t, x)$，则有

$$x = y(t, x) + tg(y(t, x)). \tag{7.1.7}$$

易见，在$t$充分小时，$y(t, x)$可以由隐函数定理唯一决定，从而问题(7.1.3)在$t$充分小时的解为

$$u(t, x) = u_0(y(t, x)). \tag{7.1.8}$$

若$g'(y) < 0$，在$t$增大时特征线族(7.1.6)可以形成包络. 包络线的方程由(7.1.6)联立

$$1 + tg'(y) = 0 \tag{7.1.9}$$

而决定. 由(7.1.9)知$t = -\dfrac{1}{g'(y)}$，故包络线与相应特征线的切点为$\left(-\dfrac{1}{g'(y)}, y - \dfrac{g(y)}{g'(y)}\right)$. 函数$-\dfrac{1}{g'(y)}$的极值对应于包络的尖点. 由于在此要集中讨论在激波生成点附近解的局部构造，故假设包络仅含一个尖点，也即假定存在某个$y_0$，使

$$(y - y_0)g''(y) > 0. \tag{7.1.10}$$

易见，在条件(7.1.10)下，$-\dfrac{1}{g'(y)}$在$y_0$点取极小值$t_0$，相应地，记

$x_0 = y_0 + t_0 g(y_0)$, $(t_0, x_0)$ 就是包络 $\Gamma$ 的尖点.

当 $t > t_0$ 时,方程(7.1.9)有两个根,分别记为 $y = \eta_-(t)$ 与 $y = \eta_+(t)$ $(\eta_-(t) < y_0 < \eta_+(t))$. 相应地,$\Gamma$ 的两支分别为$(t, x_+(t))$,其中 $x_\mp(t) = \eta_\mp(t) + tg(\eta_\mp(t))$. $\Gamma$ 的两支所夹的区域记为 $G: \{x_+(t) < x < x_-(t), t > t_0\}$. 在 $G$ 外与每个$(t, x)$所对应的特征线是唯一的,从而解 $u(t, x)$仍然可以用(7.1.8)表示. 可是对于 $G$ 中的点来说,由于作为等式(7.1.6)的求导所得的(7.1.9)有两个根,所以(7.1.6)有三个根:$y_-(t, x) < y_c(t, x) < y_+(t, x)$,这就是说,$G$ 中每一点$(t, x)$都被特征线扫过三次,故在 $G$ 中的解不能再用(7.1.8)来表示. 事实上,从 $G$ 的角点将出现一个激波. 它在 $G$ 中延伸,且强度不断增加.

记

$$\Omega_+ = \{t \geq t_0, x > x_+(t)\},$$

$$\Omega_- = \{t \geq t_0, x < x_-(t)\},$$

则在 $\Omega_\pm$中可以规定

$$u_\pm(t, x) = u_0(y_\pm(t, x)).$$

易见,$u_\pm(t, x)$ 在 $G = \Omega_+ \cap \Omega_-$ 上均有定义. 在 $G$ 上作常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \phi(t) = \dfrac{f(u_+(t, \phi(t))) - f(u_-(t, \phi(t)))}{u_+(t, \phi(t)) - u_-(t, \phi(t))} \\ \phi(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.1.11}$$

如果能证明(7.1.11)在 $G$ 中有唯一解,且解 $\phi(t)$满足 $x_+(t) < \phi(t) < x_-(t)$,则定义

$$u(t, x) = \begin{cases} u_+(t, x), & x > \phi(t); \\ u_-(t, x), & x < \phi(t), \end{cases} \tag{7.1.12}$$

那么 $u(t, x)$就是问题(7.1.3)的弱解,且 $x = \phi(t)$ 就是相应的激波. 事实上,(7.1.11)就是激波上应该成立的 Rankine-Hugoniot

条件. 由于在 $\Gamma$ 的两侧的特征线是向下的,故熵条件也是满足的. 于是,问题(7.1.3)的存在定理可以表述为:

**定理 7.1.1** 设(7.1.3)中 $f(u)\in C^{\infty}$, $u_0(y)\in C^p(p\geq 4)$, 又 $g(y)=f(u_0(y))$ 满足

$$g'(y_0)<0,\ (y-y_0)g''(y)>0,\ g'''(y_0)>0,$$

则记

$$t_0=-\frac{1}{g'(y_0)},\ x_0=y_0+t_0g(y_0),$$

初值问题(7.1.11)在 $t\geq t_0$ 时有 $C^1$ 解,且它在 $(t_0,\ \infty)$ 中属于 $C^p$. 相应地,(7.1.12)就是问题(7.1.3)的弱解.

为简化定理 7.1.1 的证明中的计算,不妨设

$$y_0=g(y_0)=0,\ g'(y_0)=-1,\ g^{(3)}(y_0)=6, \tag{7.1.13}$$

这时,条件(7.1.10)即 $yg''(y)>0$, 由(7.1.13)易得 $t=-1$, $x_0=0$. 记 $\tau=t-1$, 则问题就是在 $(\tau,\ x)=(0,\ 0)$ 的邻域中构造解. 以下的想法是先将(7.1.11)右端的函数

$$F(t,\ x)=\frac{f(u_0(y_+(t,\ x)))-f(u_0(y_-(t,\ x)))}{u_0(y_+(t,\ x))-u_0(y_-(t,\ x))}$$

作延拓,然后证明方程 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=F(t,\ \phi(t))$ 有满足 $\phi(t_0)=0$ 的解,且解曲线 $x=\phi(t)$ 落在 $G$ 中. 为此,下面通过证明几个引理来实现这一点.

**引理 7.1.1** $\eta_\pm$ 为 $\sqrt{\tau}$ 的 $C^{p-3}$ 函数. 在 $\tau=0$ 的邻域中,有估计

$$\eta_\pm\sim\pm\sqrt{\frac{\tau}{3}},\quad x_\pm\sim\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{\frac{3}{2}}. \tag{7.1.14}$$

**证明** 只需讨论 $\eta_+$, $x_+$ 就够了. 当 $t>t_0$ 时,显然有 $\eta_\pm\in$

$C^{p-1}$. 为讨论 $\tau = 0$ 处的可微性，注意到 $g'(\eta) - g'(0) = 1 - \frac{1}{t}$，利用 $g''(0) = 0$，可得

$$\eta^2 \int_0^1 g^{(3)}(\theta\eta)(1-\theta)\mathrm{d}\theta = 1 - \frac{1}{t}.$$

记

$$h(\eta, \tau) = \eta\left(\int_0^1 g^{(3)}(\theta\eta)(1-\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1/2} - \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}},$$

则 $\eta_+(t)$满足 $h(\eta, \tau) = 0$. 今由于 $h(0, 0) = 0$, $\partial_\eta h(0, 0) = \sqrt{3}$，故由隐函数定理可知 $\eta \in C^{p-3}$，并得(7.1.14)中的第一个估计式. 又由于

$$\begin{aligned} x_+(t) &= \eta_+(t) + tg(\eta_+(t)) \\ &= t(g(\eta_+(t)) - g'(\eta_+(t))\eta_+(t)), \end{aligned}$$

而在 $\tau = 0$ 的邻域中

$$\begin{aligned} g(\eta_+(t)) - g'(\eta_+(t))\eta_+(t) &= -\frac{1}{3}g^{(3)}(0)(\eta_+(t))^3 + O(\tau^2) \\ &= -2(\eta_+(t))^3 + O(\tau^2), \end{aligned}$$

从而可得关于 $x_+(t)$的估计. □

注意，在 $(\eta_-(t), \eta_+(t))$ 中 $1 + tg'(y) < 0$，故作为由

$$F(t, x, y) \equiv y + tg(y) - x = 0$$

所决定的函数 $y_\pm(t, x)$有

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{1}{F_y} > 0,$$

所以 $y_\pm(t, x)$是 $x$ 的单调增函数. 现导入以下的记号:

$$\tilde{y}_-(t, x) = \begin{cases} y_-(t, x_+(t)), \text{若 } x \le x_+(t); \\ y_-(t, x), \text{若 } x_+(t) \le x \le x_-(t); \\ \eta_-(t), \text{若 } x \ge x_-(t). \end{cases}$$

$$\tilde{y}_+(t,x)=\begin{cases} y_+(t,x_+(t)),\ 若\ x\geq x_-(t);\\ y_+(t,x),\ 若\ x_+(t)\leq x\leq x_-(t);\\ \eta_+(t),\ 若\ x\geq x_+(t), \end{cases}$$

则 $\tilde{y}_\pm$ 是定义在 $t\geq t_0$ 中的连续函数,且在 $G$ 中 $\tilde{y}_\pm=y_\pm$. 关于 $\eta_\pm(t)$, $y_\pm(t)$等的位置间的关系可见图 7.1.1.

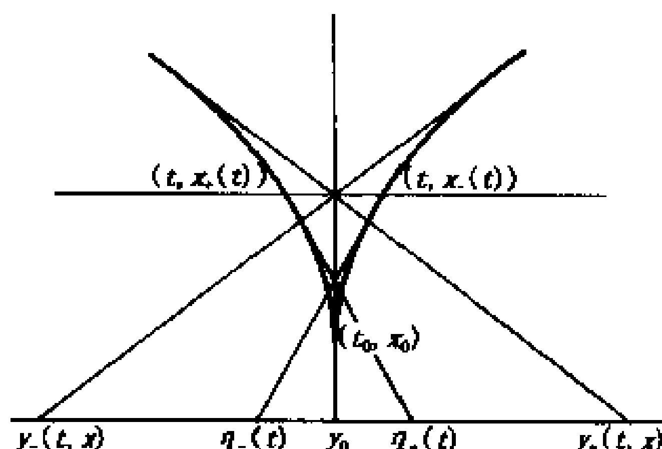



图 7.1.1

**引理 7.1.2** (1) 有如下估计成立:

$$\begin{cases} \tilde{y}_-(t,x)=O(\sqrt{\tau});\\ \tilde{y}_+(t,x)=O(\sqrt{\tau}). \end{cases} \tag{7.1.15}$$

(2) 存在 $C>0$, 使得

$$x(\tilde{y}_-(t,x)+\tilde{y}_+(t,x))\geq -C_\tau|x|. \tag{7.1.16}$$

**证明** 由于

$$0\leq\eta_+(t)\leq\tilde{y}_+(t,x)\leq y_+(t,x_-(t)),$$

故若能对 $z=y_+(t,x_-(t))$ 建立估计 $z=O(\sqrt{\tau})$, (7.1.15)就成立. 注意,$z$ 满足

$$z+\mathrm{tg}(z)=x_-(t)=\eta_-(t)+tg(\eta_-(t)),$$

$$1+tg'(\eta_-(t))=0,$$

所以

$$g(z) - g(\eta_-(t)) = (z - \eta_-(t))g'(\eta_-(t)).$$

利用 Taylor 展开，有

$$g''(\eta_-(t)) + (z - \eta_-(t)) \times \int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\eta_-(t) + \theta(z - \eta_-(t)))\mathrm{d}\theta = 0,$$

其中 $g''(\eta_-(t)) = 6\eta_-(t) + O(\tau)$. 而在 $t_0$ 点，有

$$\int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\eta_-(t) + \theta(z - \eta_-(t))\mathrm{d}\theta \sim 2,$$

从而有 $z - \eta_-(t) \sim 3\eta_-(t)$，故得(7.1.15).

为证(7.1.16)，只需证明

$$\tilde{y}_+(t, 0) + \tilde{y}_-(t, 0) = O(\tau). \qquad (7.1.17)$$

事实上，由(7.1.17)并利用 $\tilde{y}_+ + \tilde{y}_-$ 关于 $x$ 为单调增函数的性质，即可得(7.1.16). 记 $\xi_\pm(t) = \tilde{y}_\pm(t, 0)$，则 $\xi_\pm$满足

$$0 = \xi + tg(\xi) = \xi(\tau g'(0) + \frac{t}{2}\xi^2\int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\theta\xi)\mathrm{d}\theta),$$

于是

$$\xi_\pm = \pm\sqrt{\frac{2\tau}{t\int_0^1 (1-\theta)^2 g^{(3)}(\theta\xi_\pm)\mathrm{d}\theta}},$$

所以 $\xi_\pm \sim \pm\sqrt{\tau}$，且 $\xi_+(t) + \xi_-(t) = O(\tau)$. □

记 $a(x, y) = \dfrac{f(u_0(x)) - f(u_0(y))}{u_0(x) - u_0(y)}$，则问题(7.1.11)也可写成

$$\begin{cases} \phi'(t) = a(y_+(t, \phi(t)), y_-(t, \phi(t))); \\ \phi(t_0) = 0. \end{cases} \qquad (7.1.18)$$

**引理 7.1.3** $a(x, y)$是有界的 $C^p$ 函数，关于 $x$ 为单调减少，

且满足

$$a(x, y) = -\frac{1}{2}(x+y) + b(x, y), \qquad (7.1.19)$$

其中 $b(x, y) = O(x^2 + y^2)$.

**证明**　$a(x, y)$的有界性与正则性是显然的. 由于 $a(x, y)$关于 $x$、$y$ 有对称性,且

$$a(y, y) = f'(u_0(y)) = g(y) = -y + O(y^2),$$

故它可写成:

$$a(x, y) = \frac{1}{2}(x+y) + b(x, y), \qquad (7.1.20)$$

其中 $b(x, y) = O(x^2 + y^2)$. 又将 $a(x, y)$表示为:

$$a(x, y) = \int_0^1 f'(u_0(x) + \theta(u_0(y) - u_0(x)))\mathrm{d}\theta.$$

关于变量 $x$ 求导,有

$$\partial_x a(x, y) = \int_0^1 (1-\theta)u_0'(x) f''(u_0(x) + \theta(u_0(y) - u_0(x)))\mathrm{d}\theta.$$

由于 $f'' > 0$, $u_0' < 0$, 故 $\partial_x a(x, y) < 0$, 从而 $a(x, y)$关于 $x$ 是单调下降的. □

**引理 7.1.4**　问题(7.1.18)有解

$$\phi(t) \in C^1([t_0, +\infty)) \cap C^p((t_0, +\infty)),$$

$$\phi(t) = O((t-t_0)^2),$$

并满足

$$x_+(t) < \phi(t) < x_-(t), 若 t > t_0. \qquad (7.1.21)$$

**证明**　代替问题(7.1.18)而考察问题

$$\begin{cases} \phi'(t) = a(\tilde{y}_+(t, \phi(t)), \tilde{y}_-(t, \phi(t))); \\ \phi(t_0) = 0. \end{cases} \qquad (7.1.22)$$

由于函数 $(t, x) \to a(\tilde{y}_+(t, x), \tilde{y}_-(t, x))$ 为连续有界，故由 Piano 定理知，该问题至少有一个 $C^1([t_0, \infty))$解. 进而还有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi(t)^2) = 2\phi(t)\phi'(t)$$

$$= 2\phi(t)a(\tilde{y}_+(t, \phi(t)), \tilde{y}_-(t, \phi(t))). \quad (7.1.23)$$

利用(7.1.20)，上式还可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi(t)^2) = -\phi(t)(\tilde{y}_+(t, \phi(t)) + \tilde{y}_-(t, \phi(t)))$$

$$+ O(\tau)\phi(t).$$

根据引理 7.1.2 即知 $t \geq t_0$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi(t)^2) \leq C\tau|\phi|,$$

积分后可得

$$|\phi(t)| \leq \frac{C}{4}\tau^2.$$

于是，利用引理 7.1.1 中对 $x_\pm(t)$的估计，存在一个 $t_1 > t_0$，使得在$(t_0, t_1)$中，

$$x_+(t) < \phi(t) < x_-(t)$$

成立. 此外，利用 $a(x, y)$ 关于 $x$ 的单调性，有

$$a(\tilde{y}_+(t, x_-(t)), \tilde{y}_-(t, x_-(t)))$$

$$= a(y_+(t, x_-(t)), \eta_-(t))$$

$$= a(\eta_-(t), \eta_-(t)) = g(\eta_-(t)) = x'(t).$$

同样可以证明

$$x'(t) < a(\tilde{y}_+(t, x_+(t)), \tilde{y}_-(t, x_-(t))).$$

所以，曲线 $x = \phi(t)$ 决不可能与曲线 $x = x_\pm(t)$ 相交，故(7.1.21)成立. 由此又有

$$a(\tilde{y}_+(t, \phi(t)), \tilde{y}_-(t, \phi(t))) = a(y_+(t, x_+(t)), y_-(t, \phi(t))).$$

所以函数 $\phi(t)$ 也满足(7.1.18)，且由于 $y_\pm$ 为 $C^p$ 函数，$\phi(t)$ 也是 $C^p$ 光滑，并且问题(7.1.18)的解为唯一的.

如前面所说，当得到了问题(7.1.11)在区域 $G$ 中的解 $\phi(t)$ 以后，就可用(7.1.12)定义问题(7.1.3)的弱解，所以定理 7.1.1 也就相应地得到了证明. □

**三、激波生成点邻域中解的估计**

以下建立在激波生成点 $(t_0, x_0)$ 邻域中解的精细估计，它不仅有助于我们了解在激波生成点附近解的性质，也是以后讨论更复杂情形的基础.

首先讨论 $y_\pm(t, x)$ 在 $(t_0, x_0)$ 邻域中的估计，令

$$s = \sqrt{\tau}, \ \lambda = \frac{x}{s^3}, \ \mu = \frac{y}{s}, \ v = (\tau^3 + x^2)^{1/6}. \qquad (7.1.24)$$

则有如下引理：

**引理 7.1.5**

$$y_\pm = s\left(\pm 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{g^{(4)}(0)}{48}s\right) + O(s^3 + s\lambda^2), \qquad (7.1.25)$$

$$\frac{2}{3}v \leq y_\pm \leq \frac{3}{2}v. \qquad (7.1.26)$$

**证明** $y_\pm(t, x)$ 均满足(7.1.6)式，现记

$$h(y) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2} g^{(3)}(\theta y)\mathrm{d}\theta - 1,$$

则 $h \in C^{p-3}$，$h(0) = 0$. 利用函数 $g(y)$ 的各阶导数在零点的性质，可有

$$g(y) = -y + y^3(h(y) + 1),$$

故(7.1.6)即

$$y + t(-y + y^3 + h(y)y^3) = x.$$

以(7.1.24)代入，得到

$$F(s, \lambda, \mu) \equiv (1+s^2)\mu^3 - \mu + (1+s^2)\mu^3 h(s\mu) - \lambda$$
$$= 0. \tag{7.1.27}$$

在 $(s, \lambda) = (0, 0)$ 时，上式有三个根：$\mu_- = -1$，$\mu_+ = 1$，$\mu_c = 0$.
由于 $\partial_\mu F(0, 0, \mu_\pm) = 2$，则由隐函数定理可以将 $\mu_\pm$ 解为 $s$、$\lambda$ 的 $C^{p-3}$ 函数. 因此，可以将 $\mu_\pm$ 写成 $\pm 1 + as + b\lambda + O(s^2 + \lambda^2)$，而且

$$a = \mu_s = -\frac{F_s}{F_\mu} = -\frac{1}{2}\mu^4 h'(0) = \frac{1}{48}g^{(4)}(0),$$

$$b = \mu_\lambda = -\frac{F_\lambda}{F_\mu} = \frac{1}{2},$$

故得(7.1.25)式.

以下证明(7.1.26)，不妨仅讨论 $y_+$ 的估计. 记

$$T = \frac{\tau}{v^2}, \quad X = \frac{x}{v^3}, \quad Y = \frac{y}{v},$$

则(7.1.27)又可写成

$$F(\tau, T, X, Y) \equiv X + TY - (1+\tau)Y^3(h(vY) + 1)$$
$$= 0. \tag{7.1.28}$$

在此需说明，在 $v$ 充分小时，由(7.1.28)所决定的 $Y$ 在 $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ 中. 为此，只需说明在 $v = 0$ 时，由(7.1.28)解出的 $Y$ 落在 $\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right)$ 中. 当 $v = 0$ 时，(7.1.28)化成

$$F_0(Y) \equiv Y^3 - TY - X = 0. \tag{7.1.29}$$

显然，由 $T^3 + X^2 = 1$ 可知 $T + X \geq 1$. 由于

$$F_0(0) \leq 0, \ F_0'(0) + F_0(0) = -T - X < 0,$$

故在 $Y$ 充分小时，$F_0$ 为负，从而 $F_0(Y) = 0$ 至少有一正根 $Y_0$. 但由于 $Y$ 取充分小正数时 $F_0(Y) < 0$，故若 $F_0(Y) = 0$ 的正根个数大

于 1,正根个数就必为 3. 这样,$F_0'(Y)=0$ 将有两个正根. 注意,$F_0'=3Y^2-T$,它的根必为一正一负. 这个矛盾说明 $F_0(Y)=0$ 的正根只能是唯一的.

建立了上述正根唯一性的事实,就可以采取以下简单的办法来估计正根的界. 由于

$$F_0\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}-\frac{4}{3}T-X>\frac{64}{27}-\frac{4}{3}-1>0,$$

则 $Y_0<\frac{4}{3}$. 又由

$$F_0\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{64}-\frac{3}{4}T-X<\frac{27}{64}-\frac{3}{4}(T+X)<0,$$

可知 $Y_0>\frac{3}{4}$. 结合前面的讨论可知,当 $\tau$ 取充分小的正值时,(7.1.28)的根在 $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$ 中,故(7.1.25)成立. □

利用上述引理,就可得到问题(7.1.3)的弱解在激波生成点附近的估计.

**定理 7.1.2** 在 $(t_0, x_0)$ 点的邻域中,弱解 $u(t,x)$ 在激波两侧均有以下估计成立:

$$\begin{cases}|u(t,x)-u(t_0,x_0)|\le C_0((t-t_0)^3+(x-x_0)^2)^{1/6},\\ |\partial_t u(t,x)|\le C_0((t-t_0)^3+(x-x_0)^2)^{-1/6},\\ |\partial_x u(t,x)|\le C_0((t-t_0)^3+(x-x_0)^2)^{-1/3},\\ |\partial_{xx} u(t,x)|\le C_0((t-t_0)^3+(x-x_0)^2)^{-5/6}.\end{cases}\tag{7.1.30}$$

**证明** 在 $(t_0, x_0)$ 的邻域中,$u(t,x)$ 按(7.1.12)定义. 当 $x>\phi(t)$ 时,

$$\begin{aligned}|u(t,x)-u(t_0,x_0)|&=|u_0(y_+(t,x))-u_0(y_+(t_0,x_0))|\\ &\le C_0|y_+(t,x)|,\end{aligned}$$

故由(7.1.27)即得(7.1.30)的第一式. 为得到解的导数的估计,先

考察 $y_+(t, x)$的导数的估计，易见

$$\partial_x y_+(t, x) = \frac{1}{1 + tg'(y_+(t, x))}. \qquad (7.1.31)$$

根据对 $g(y)$所作的假定，知

$$\begin{aligned} 1 + tg'(y_+(t, x)) &= 1 + t(-1 + 3y_+^2(t, x)) \\ &\quad + O((\tau^3 + x^2)^{1/2}) \\ &= 3y_+^2(t, x) - \tau + O((\tau^3 + x^2)^{1/2}) \\ &\geq \frac{1}{2}(3y_+^2(t, x) - \tau). \end{aligned} \qquad (7.1.32)$$

对充分小的 $\tau$，有

$$3y_+^2(t, x) - \tau \geq \frac{4}{3}(\tau^3 + x^2)^{1/3} - \tau \geq c(\tau^3 + x^2)^{1/3},$$

所以

$$\begin{aligned} |\partial_x(u_0(y_+(t, x))| &\leq |u_0'| \cdot |\partial_x y_+(t, x)| \\ &\leq C_0(\tau^3 + x^2)^{-1/3}. \end{aligned} \qquad (7.1.33)$$

同样地，由于

$$\partial_t y_+(t, x) = -\frac{g(y_+(t, x))}{1 + tg'(y_+(t, x))},$$

并利用(7.1.25)，知

$$|g(y_+(t, x))| \leq C|y_+(t, x)| \leq C\sqrt{\tau},$$

从而可得(7.1.27)的第三式. 最后，关于二阶导数的估计有

$$\begin{aligned} |\partial_{xx}u_0(y_+(t, x)| &\leq |u_0''(\partial_x y_+(t, x))^2| + |u_0'(\partial_{xx}y_+(t, x))| \\ &\leq C\left((\tau^3 + x^2)^{-1/3} + \left|\frac{tg''\partial_x y_+}{(1 + tg')^2}\right|\right). \end{aligned}$$

对于该等式右端第二项，又可利用 $g''(0) = 0$ 以及(7.1.31)、(7.1.32)得到

$$\left|\frac{tg''\partial_x y_+}{(1+tg')^2}\right| \leq C(\tau^3 + x^2)^{5/6},$$

于是可得(7.1.30)的第四式. □

## §7.2 2 × 2 方程组的情形

拟线性方程组的激波生成问题要比单个方程的情形复杂得多. 下面仅在上节所获得结果的基础上,讨论一个 2 × 2 平面无旋流方程组的激波生成,由于在激波生成的初期,其强度很弱. 这时,平面无旋流方程组是 Euler 气体动力学方程组的很好的近似,故这里所获得的激波也正是真实物理过程所生成的激波合适的描述. 本节中所涉及的关于气体动力学方程组的基本知识可参见文献[57]和[125].

### 一、问题的背景与结论

平面无旋流的方程组为

$$\begin{cases}(a^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (a^2 - v^2)v_y = 0; \\ u_y = v_x,\end{cases} \tag{7.2.1}$$

其中$(u, v)$表示气体速度,$a$ 为音速,它与密度 $\rho$ 的关系为 $a = (\gamma\rho^{\gamma-1})^{1/2}$, 其中 $\gamma$ 为绝热指数. $a, u, v$ 之间满足 Bernoulli 关系式

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \text{常数}. \tag{7.2.2}$$

方程(7.2.1)的推导可参见文献[57].

今假定有一均匀气流来自无穷远处,在 $x < 0$ 时流动方向与位于 $x$ 轴的固壁平行,气流速度为超音速,即 $(u, v) = (q_0, 0)$,其中 $q_0 > a_0$. 设气流位于固壁的上方,而固壁从 $x = 0$ 点起向上弯曲,则气流由于受到挤压而形成压缩的单波. 当压缩的强度不断增大,最终就会有激波产生.

作为方程(7.2.1)的弱解$(u, v)$，它在解的光滑区域中自然满足(7.2.1)，若解在某个曲线$\Gamma$上有间断，以$[\cdot]$记在括号中相应量的间断，以$\sigma$记$\Gamma$上的点的斜率，则在激波上应满足的激波关系为：

$$[u]+\sigma[v]=0,\quad \sigma[\rho u]-[\rho v]=0. \tag{7.2.3}$$

于是，任何能与$(u_0, v_0, \rho_0)$相连接的状态$(u, v, \rho)$必须满足

$$(\rho u-\rho_0 u_0)(u-u_0)+(\rho v-\rho_0 v_0)(v-v_0)=0. \tag{7.2.4}$$

利用变量$\theta=\arctan(v/u)$和$q=\sqrt{u^2+v^2}$，(7.2.4)也可写成

$$\cos(\theta-\theta_0)=\frac{\rho q^2+\rho_0 q_0^2}{(\rho+\rho_0)q_0 q}, \tag{7.2.5}$$

并称为激波极线方程.

在此先用特征线法来构造连续的压缩单波. (7.2.1)的特征方向为

$$\lambda_\pm=\frac{uv\pm a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{u^2-a^2}. \tag{7.2.6}$$

记(7.2.1)的Riemann不变量为$r(u, v)$和$s(u, v)$，它们的具体表示式为

$$r=\theta+F(q),\quad s=\theta-F(q), \tag{7.2.7}$$

其中$F(q)=\int\frac{\sqrt{q^2-a^2}}{aq}\mathrm{d}q$. 若用Riemann不变量替换原方程组(7.2.1)中的$(u, v)$，则方程组可化成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial x}+\lambda_+\dfrac{\partial s}{\partial y}=0;\\[2ex] \dfrac{\partial r}{\partial x}+\lambda_-\dfrac{\partial r}{\partial y}=0,\end{cases} \tag{7.2.8}$$

它说明$r$与$s$分别在第一族$(\lambda_-)$与第二族$(\lambda_+)$特征线上为常数.

在前面所作的气流来自左方且位于固壁上方的假定下，在光滑解存在的区域中的每一点都可作一条第一族特征线通往 $x<0$ 的区域，所以，在整个区域中 $r\equiv$ 常数，第二族特征线均为直线. 于是，在光滑解的区域中，在每条第二族特征线上 $u$、$v$ 均取常值，这样的解称为第二类单波. 整个单波区域在映射

$$T:(x,y)\to(u,v)=(u(x,y),v(x,y))$$

下的象为 $(u,v)$ 平面上的外摆线：

$$\begin{cases}u=a_*(\cos\mu(\omega-\omega_*)\cos\omega+\mu^{-1}\sin\mu(\omega-\omega_*)\sin\omega);\\ v=a_*(\cos\mu(\omega-\omega_*)\sin\omega-\mu^{-1}\sin\mu(\omega-\omega_*)\cos\omega),\end{cases}\tag{7.2.9}$$

其中 $\mu=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}$，$a_*$ 为临界音速，$a_*$ 与 $\omega_*$ 均由来流决定.

设固壁的方程为 $y=f(x)$，它是充分光滑的，在 $x<0$ 时为零，在 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，它表示固壁是向上凹的. 由于在固壁表面气流的方向必须与固壁平行，故对任意的 $\bar{x}\geq 0$，在 $(\bar{x},f(\bar{x}))$ 的速度方向为 $u:v=1:f'(\bar{x})$. 于是参数 $\omega$ 与 $\bar{x}$ 的关系可由

$$f'(\bar{x})=\frac{(\cos\mu(\omega-\omega_*)\sin\omega-\mu^{-1}\sin\mu(\omega-\omega_*)\cos\omega)}{(\cos\mu(\omega-\omega_*)\cos\omega+\mu^{-1}\sin\mu(\omega-\omega_*)\sin\omega)}$$

所决定. 由简单的计算可知，上式右端关于 $\omega$ 的导数大于零，故由 $f''(x)>0$ 的假定知 $\omega$ 是 $\bar{x}$ 的单调函数. 在 $(x,y)$ 平面上与参数 $\omega$ 相对应的特征线为

$$\begin{cases}x=\bar{x}+t\cos\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)(=\bar{x}+t\sin\omega);\\ y=f(\bar{x})+t\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)(=f(\bar{x})-t\cos\omega).\end{cases}\tag{7.2.10}$$

显然，若 $x_1$、$x_2$ 两点满足 $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$，则它们所对应的特征线的斜率满足 $\tan\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right) > \tan\left(\omega_2 - \frac{\pi}{2}\right)$，所以这两条特征线必在上半平面的某一点 $P$ 相交，从而由解在第二族特征线上取常值的性质知，光滑解的定义域不可能延拓到 $P$ 点，在此以前解必定会破裂.

与 §7.1 中所作的相仿，我们也通过作特征线包络的方法来决定激波的生成点. 特征线族(7.2.8)的包络方程为

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} x_{\bar{x}} & x_t \\ y_{\bar{x}} & y_t \end{vmatrix} = 0. \tag{7.2.11}$$

将(7.2.10)代入(7.2.11)可得

$$\Delta \equiv \cos\omega - t\omega' + f'\sin\omega,$$

所以在包络上有 $t = \frac{1}{\omega'}(f'\sin\omega + \cos\omega)$. 以 $\bar{x}$ 为参数所写出的包络方程为

$$\begin{cases} x = \bar{x} - \dfrac{1}{\omega'}(f'\sin\omega + \cos\omega)\sin\omega; \\ y = f(\bar{x}) + \dfrac{1}{\omega'}(f'\sin\omega + \cos\omega)\cos\omega. \end{cases} \tag{7.2.12}$$

将上式第一式右端 $\omega$、$\omega'$ 均以 $\bar{x}$ 的函数代入，所得的表达式记为 $h(\bar{x})$，则当

$$h'(\bar{x}) = 0,\ h''(\bar{x}) > 0$$

在某点 $\bar{x} = \bar{x}_0$ 成立时，包络上点的 $x$ 坐标取极小值 $x_0$，由此可以得到包络的尖点 $(x_0, y_0)$.

在本节中将证明的基本结论为如下定理：

**定理 7.2.1**　设 $f(x)$ 满足前述的条件，在区域 $\{x > 0,\ y > f(x)\}$ 中方程(7.2.1)的第二类特征线形成尖点在 $(x_0, y_0)$ 的包络，则在 $(x_0, y_0)$ 的邻域 $\Omega$ 中存在(7.2.1)的弱解，它具有自 $(x_0, y_0)$ 发出的激波 $\Gamma: y = \phi(x)$，解 $(u, v)$ 在 $\Omega\backslash\Gamma$ 上连续，且有如下的估计：

$$\begin{cases}\phi(x) = y_0 + a(x - x_0) + O((x - x_0)^2); \\ r(x, y) = O((x - x_0)^{3/2}); \\ s(x, y) = s(x_0, y_0) + O((x - x_0)^3 \\ \qquad\qquad + (y - y_0 - a(x - x_0)^2)^{1/6}),\end{cases} \tag{7.2.13}$$

其中 $a$ 是过尖点$(x_0, y_0)$的第二族特征线的斜率.

如前所述,我们所讨论的问题在 $x < x_0$ 时的解是一个单波,它在每条对应于参数 $\omega$ 的特征线(7.2.12)上$(u, v)$取常值,这个常值由(7.2.9)决定,在 $x > x_0$ 时,解有奇性,我们采用迭代法来构造解,其步骤是:先取 $r^{(0)}(x, y)$为常数,将它代入(7.2.8)的第一式就得到仅含 $s$ 的方程,利用 $s$ 在 $x < x_0$ 时的初值,解得 $s^{(0)}(x, y)$. 然后,递归地利用(7.2.3)决定激波的位置,通过沿特征线的积分决定激波两侧 $r^{(\nu)}(x, y)$、$s^{(\nu)}(x, y)$的值而建立序列$\{r^{(\nu)}, s^{(\nu)}\}$,该序列的极限就是我们所要求的解,当然,按这一步骤来获得(7.2.1)带有起始于$(x_0, y_0)$激波的解,需要证明整个过程中每一步的合理性,以及所建立的序列$\{r^{(\nu)}, s^{(\nu)}\}$的收敛性. 下面将逐点证明之.

**二、第一近似解的性质**

由于我们主要关心的是激波的生成,故可仅仅限制在激波生成点的邻域中讨论问题,不妨设由 $\{x = 0, y \geq 0\}$ 发出的第二族特征线覆盖了该点的邻域,这样,在决定激波生成点邻域中的弱解时,只需考虑有关方程的初值问题. 为了简化以下的运算,通过坐标系的线性变换 $T_0$,又可将$(x_0, y_0)$取为新坐标系的原点,且使过该点的第二族特征线与 $x$ 轴相符,不妨设以后所考虑的初值问题中的初始条件都给定在 $x = -1$ 上. 此外,还设 Riemann 不变量 $r$ 在 $x < 0$ 时的取值为零.

按前面所述,第一步是求得 $s^{(0)}(x, y)$,在连续可微区域中,它应满足

$$\partial_x s(x, y) + \lambda_+ \partial_y s(x, y) = 0, \tag{7.2.14}$$

$$s(-1,\ y)=s_0(y). \tag{7.2.15}$$

注意，(7.2.14)的弱解所应满足的激波条件与守恒律形式有关. 由于方程(7.2.14)可能对应于许多不同的守恒律形式，而它们所对应的激波条件是各不相同的. 在此自然应当从中选取一个，使其相应的激波条件与(7.2.3)一致. 为此，以 $G$ 记 $F(q)$ 的反函数，则

$$q=G\left(\frac{r-s}{2}\right),\ G'(F(q))=aq(q^2-a^2)^{-1/2}.$$

又令

$$e(u,\ v)=u-av(q^2-a^2)^{-1/2},$$

则

$$e\lambda_+=v+au(q^2-a^2)^{-1/2},$$

从而

$$\begin{aligned} e &= q\cos\theta-aq\sin\theta(q^2-a^2)^{-1/2} \\ &= \left(2G\left(\frac{r-s}{2}\right)\sin\frac{r+s}{2}\right)_s, \\ e\lambda_+ &= aq\cos\theta(q^2-a^2)^{-1/2}+q\sin\theta \\ &= -\left(2G\left(\frac{r-s}{2}\right)\cos\frac{r+s}{2}\right)_s. \end{aligned}$$

于是，将(7.2.14)乘以 $e$ 并取 $r=0$，就可得

$$\left(G\left(-\frac{s}{2}\right)\sin\frac{s}{2}\right)_x+\left(-G\left(-\frac{s}{2}\right)\cos\frac{s}{2}\right)_y=0, \tag{7.2.16}$$

(7.2.16)就是寻求 $s^{(0)}(x,\ y)$ 的守恒律方程的形式. 这时，激波条件为

$$\sigma=-\frac{\left[2G\left(-\frac{s}{2}\right)\cos\frac{s}{2}\right]}{\left[2G\left(-\frac{s}{2}\right)\sin\frac{s}{2}\right]}. \tag{7.2.17}$$

注意，在 $r=0$ 时(7.2.17)的分子与分母分别为 $[u]$ 与 $[v]$，它与(7.2.3)是相符的.

问题(7.2.14)、(7.2.15)的解 $s^{(0)}(x,y)$ 的性质可以利用§7.1的结果而得到. 为此，将(7.2.14)化到§7.1中讨论过的标准形状. 记

$$m=G\left(-\frac{s}{2}\right)\sin\frac{s}{2},\ f(m)=G\left(-\frac{s}{2}\right)\cos\frac{s}{2}.$$

由于 $G(s)$ 和 $\sin\frac{s}{2}$ 都是单调增长的函数，故 $m(s)$ 的反函数 $h(m)$ 存在，从而 $f(m)=\left[G\left(-\frac{s}{2}\right)\cos\frac{s}{2}\right]_{s=h(m)}$ 也是有确切定义的. 于是问题(7.2.14)、(7.2.15)可写成

$$\begin{cases}m_x+(f(m))_y=0;\\ m(-1,y)=m(s_0(y)).\end{cases}\tag{7.2.18}$$

应用定理7.1.1和定理7.1.2就可得到 $m(x,y)$ 与激波 $y=\phi(x)$ 的存在性与其估计. 相应地，估计(7.1.27)对于 $s^{(0)}(x,y)$ 也是成立的.

在以后的迭代过程中，为了避免激波位置移动所带来的麻烦，在这里再作坐标变换将激波固定在 $x$ 轴上. 例如，若在第 $\nu$ 步迭代过程中，激波方程为 $y=\phi^{(\nu)}(x)$，$x\geq 0$，则这个变换就是

$$E^{(\nu)}:x_1=x,\ y_1=\begin{cases}y-\phi^{(\nu)}(x),\ 若\ x\geq 0;\\ y,\ 若\ -1\leq x\leq 0.\end{cases}$$

记

$$\sigma^{(\nu)}=\begin{cases}(\phi^{(\nu)})',\ 若\ x\geq 0;\\ 0,\ 若\ -1\leq x\leq 0.\end{cases}$$

当 $\nu=0$ 时，在新坐标系下(为记号简单起见，仍以 $(x,y)$ 记新的坐标变量) $s^{(0)}(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}\partial_x s^{(0)}(x,y)+(\lambda_+-\sigma^{(0)})\partial_y s^{(0)}(x,y)=0; \\ s^{(0)}(-1,y)=s_0(y).\end{cases} \qquad (7.2.19)$$

由于以后所作的估计大多要通过沿特征线积分的方法得出来，因此，首先需要了解特征线的走向，以 $y=\eta(x,a,b)$ 记 (7.2.19)过$(a,b)$点往左作出的特征线，并将对应于 $b\gtrless 0$ 的特征线记为 $y=\eta_\pm(x,a,b)$. 在以下的讨论中，记 $\eta_0=\eta(-1,a,b)$, $z_\pm(a,b)$ 相当于上节中引入的 $y_\pm(t,x)$. 记 $g(z)=\lambda_+(s_0(z))$，前面引入的变换 $T_0$ 已说明了 $g(0)=g''(0)=0$, $g'(0)=-1$，此外，为简化计算，仍设 $g^{(3)}(0)=-6$ (此条件不满足时，只需在以下的估计中添入一定的常数因子).

**引理 7.2.1** 在原点邻域中，(7.2.19)的特征线向左延伸不会与 $x$ 轴相交，对于特征线上的点有估计

$$\pm\eta_\pm(0,a,b)=\sqrt{a}+O(a)+O_1(|b|^{1/3}), \qquad (7.2.20)$$

$$\pm(\eta_+(x,a,b)-b)=\sqrt{a}(a-x)+O_1(|b|^{1/3}(a-x)) + O(a(a-x)), \qquad (7.2.21)$$

其中 $O_1(|b|^{1/3})$ 表示不超过 $O(|b|^{1/3})$的正数.

**证明** 仅考察 $b>0$ 的情形：由 $\eta$ 的定义知

$$\eta(x,a,b)+\phi(x)=\eta_0+(x+1)g(\eta_0), \qquad (7.2.22)$$

取 $x=a$ 得

$$b+\phi(a)=\eta_0+(a+1)g(\eta_0),$$

所以

$$b-\eta(x,a,b)=\phi(x)-\phi(a)+(a-x)g(\eta_0).$$

由 $\phi(x)=O(x^2)$ 知 $\phi(x)-\phi(a)=O(a(a-x))$，从而根据 $g$ 在原点的导数值，可得下式

$$b-\eta(x,a,b)=-\eta_0(a-x) + O(\eta_0^3(a-x)+a(a-x)). \qquad (7.2.23)$$

又因

$$\eta_0 = z_+(a, b) = z_+(a, 0) + b\partial_b z_+(a, \theta b), \theta \in (0, 1),$$

故由上节中关于 $y_+$、$\partial_x y_+$(即这里的 $z_+$、$\partial_b z_+$)的估计(7.1.25)、(7.1.31)可知

$$\eta_0 = a^{1/2} + b^{1/3} b^{2/3} (a^3 + b^2)^{-1/3} + O(a)$$

$$= a^{1/2} + cb^{1/3} + O(a),$$

其中 $c$ 为有界正数,这就是(7.2.20). 再将此式代入(7.2.23),就得到(7.2.21). □

**引理 7.2.2**　记 $I = \int_0^a (-\lambda_{+s} \cdot s_y^{(0)})(x, \eta(x, a, b))\mathrm{d}x$,则该积分的被积函数是正的,且有估计为

$$|I| \leq \ln \frac{3}{2} + C\sqrt{a}. \tag{7.2.24}$$

**证明**　由于 $s^{(0)}$沿着特征线是常数,故

$$s^{(0)}(x, \eta(x, a, b)) = s^{(0)}(-1, \eta_0) = s_0(\eta_0),$$

从而有

$$\partial_y s^{(0)}(x, \eta(x, a, b)) \cdot \eta_b = s_0'(\eta_0) \cdot \eta_{0b}.$$

由(7.2.22)知 $\eta_b = \eta_{0b}(1 + (x+1)g'(\eta_0))$, 所以

$$\partial_y s^{(0)}(x, \eta(x, a, b)) = \frac{s_0'(\eta_0)}{1 + (x+1)g'(\eta_0)},$$

$$\lambda_{+s} \cdot s_y^{(0)} = \partial_b(\lambda_+(s^{(0)}(x, \eta(x, a, b)))) \cdot \eta_b^{-1}$$

$$= g'(\eta_0) \cdot \eta_{0b} \cdot \eta_b^{-1} = \frac{g'(\eta_0)}{1 + (1+x)g'(\eta_0)}.$$

由 $g'$ 的性质知,该分式恒小于零,故得引理第一部分的结论. 进而有

$$|I| = -\int_0^a (\lambda_{+s} \cdot s_y^{(0)})(x, \eta(x, a, b))\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^a \frac{g'(\eta_0)}{1+(1+x)g'(\eta_0)}\mathrm{d}x$$

$$= -\ln\frac{1+(1+a)g'(\eta_0)}{1+g'(\eta_0)}.$$

记 $\tilde{\eta}_0 = \eta(-1, a, 0)$，在 $b > 0$ 时 $\eta_0 > \tilde{\eta}_0$，从而 $g'(\eta_0) \geq g'(\tilde{\eta}_0)$，并有

$$-\ln\frac{1+(1+a)g'(\eta_0)}{1+g'(\eta_0)} \leq -\ln\frac{1+(1+a)g'(\tilde{\eta}_0)}{1+g'(\tilde{\eta}_0)}.$$

由(7.1.12)知 $\tilde{\eta}_0 = \sqrt{a} + O(a)$，故

$$1+g'(\tilde{\eta}_0) = 1+\left(-1+\frac{1}{2}g^{(3)}(0)\,\tilde{\eta}_0^2 + O(a^{3/2})\right)$$

$$= 3a + O(a^{3/2}),$$

$$1+(a+1)g'(\tilde{\eta}_0) = 1+(a+1)(-1+3a+O(a^{3/2}))$$

$$= 2a + O(a^{3/2}),$$

故

$$-\ln\frac{1+(1+a)g'(\tilde{\eta}_0)}{1+g'(\tilde{\eta}_0)} = -\ln\left(\frac{2}{3}(1+O(a^{1/2}))\right),$$

于是得到

$$I \leq \ln\frac{3}{2} + C\sqrt{a}.\ \square$$

**注** 若 $\zeta(x, a, b)$是满足条件

$$|\zeta(x, a, b) - \eta(x, a, b)| \leq Ca(a-x) \quad (7.2.25)$$

的函数，则有下式成立：

$$\left|\int_0^a (\lambda_{rs}\cdot s_y^{(0)})(x, \zeta(x, a, b))\mathrm{d}x\right| \leq \ln\frac{3}{2} + C\sqrt{a}.$$

(7.2.26)

此证明留给读者.

**引理 7.2.3**　若 $a>0$，且 $a$、$|b|$ 充分小，则在特征线 $y=\eta(x,a,b)$ 上，有

$$x^3+y^2\geq\frac{5}{16}(a^3+b^2). \tag{7.2.27}$$

**证明**　仍设 $b>0$，由(7.2.21)知

$$\eta(x,a,b)-b=\sqrt{a}(a-x)+O(a(a-x))+O_1(b^{1/3}(a-x)),$$

当 $b=0$ 时，得

$$\eta(x,a,0)\geq\sqrt{a}(a-x)+O(a(a-x)),$$

故存在常数 $C$，使得

$$\eta(x,a,b)-b\geq\eta(x,a,0)-Ca(a-x),$$

从而在 $a$ 充分小时有

$$\eta(x,a,b)\geq b+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a}(a-x),$$

由此得

$$x^3+y^2\geq b^2+\frac{3}{4}a(a-x)^2+x^3.$$

由于函数 $\frac{3}{4}a(a-x)^2+x^3$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 时取极小，故

$$x^3+y^2\geq b^2+\frac{5}{16}a^3\geq\frac{5}{16}(a^3+b^2).\square$$

在构造 $r(x,y)$ 的近似 $r^{(\nu)}(x,y)$ 时，要沿第一族特征线对相应的近似方程进行积分. 因为第一族特征线要穿越激波，所以对激波上诸函数跳跃度之间的关系也得详加考察.

**引理 7.2.4**　若 $\theta$、$F(q)$ 如(7.2.7)中所定义，则有

$$[\theta] = k[F(q)], \tag{7.2.28}$$

其中 $k$ 是 $\theta_-$, $\theta_+$, $q_-$, $q_+$ 的光滑函数，它在 $[q]$ 趋于零时以 $-1$ 为极限.

**证明**　由(7.2.5)有

$$\begin{aligned}
\sin^2[\theta] &= 1 - \frac{(\rho_+ q_+^2 + \rho_- q_-^2)^2}{((\rho_+ + \rho_-)q_+ q_-)^2} \\
&= -\frac{(q_+^2 - q_-^2)(\rho_+^2 (q_+^2 - q_-^2) + q_-^2 (\rho_+^2 - \rho_-^2))}{((\rho_+ + \rho_-)q_+ q_-)^2} \\
&= -\frac{(q_+ + q_-)^2(\rho_+^2 + q_-^2 (\rho_+^2 - \rho_-^2)/(q_+^2 - q_-^2))}{(\rho_+ + \rho_-)^2 q_+^2 q_-^2} \\
&\quad \times \frac{[q]^2}{[F(q)]^2}[F(q)]^2.
\end{aligned}$$

上式中 $[F(q)]^2$ 的系数在 $[q]\to 0$ 时趋于 1，事实上，这个系数的极限是

$$-\frac{4q^2\left(\rho^2 + q^2\dfrac{\rho}{q}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}q}\right)}{4\rho^2 q^4 (F'(q))^2} = -\frac{\left(\rho^2 + \rho q\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}q}\right)}{\rho^2 q^2 F'(q)^2}.$$

而由 Bernoulli 关系可得

$$q\mathrm{d}q + \gamma\rho^{\gamma-2}\mathrm{d}\rho = 0,$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}q} = -\rho q/a^2$，从而

$$-\frac{\left(\rho^2 + \rho q\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}q}\right)}{\rho^2 q^2 F'(q)^2} = -\frac{\rho^2 - \rho^2 q^2 a^{-2}}{\rho^2 q^2 (q^2 - a^2) a^{-2} q^{-2}} = 1.$$

再利用 $\sin[\theta]\sim[\theta]$，即得到形为(7.2.28)的等式，其中 $|k|$ 在 $[q]$ 趋于零时以 1 为极限. 又注意到 $[\theta]$ 与 $[q]$ 异号，而 $[q]$ 与 $[F(q)]$ 同号，故 $[\theta]$ 与 $[F(q)]$ 异号，所以 $[q]\to 0$ 时 $k\to -1$. □

**引理 7.2.5**　若在激波上 $r_- = 0$，则

$$r_+ = f(s_+, s_-)[s]^3, \tag{7.2.29}$$

其中 $f(s_+, s_-)$为其变元的光滑函数.

**证明**　由上面的引理知

$$[\theta] = (1 + h(\theta_+, \theta_-, q_+, q_-)[F(q)])F[q]. \qquad (7.2.30)$$

将"＋"号与"－"号互换,可知

$$h(\theta_-, \theta_+, q_-, q_+) = -h(\theta_+, \theta_-, q_+, q_-),$$

故 $h$ 在 $[\theta] = [q] = 0$ 为零,从而上式可写成

$$[\theta] = (1 + h_1[F(q)]^2)[F(q)]$$

或

$$[\theta]^2 = (1 + h_2[F(q)]^2)[F(q)]^2,$$

其中 $h_1$ 和 $h_2$ 为适当的光滑函数,并在 $[\theta] = [q] = 0$ 时为零. 现将 $r = \theta + F(q)$、$s = \theta - F(q)$ 代入,即得

$$[s + r]^2 = \left(1 + \frac{h_2}{4}[s - r]^2\right)[s - r]^2.$$

由于 $r_- = 0$, 故有

$$r_+([s - r] + r_+) = \frac{1}{16}h_2[s - r]^4. \qquad (7.2.31)$$

记 $z = \frac{r_+}{[s - r]}$, 则 $z$ 满足

$$z(1 + z) = \frac{1}{16}h_2[s - r]^2. \qquad (7.2.32)$$

由引理 7.2.4 知,当$[q]\to 0$ 时,

$$z = -\frac{1}{2}[\theta + F(q)]/[F(q)] \to 0,$$

故在解二次方程(7.2.32)时,根 $z$ 应选取为

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}h_2[s - r]^2},$$

所以有 $r_- = h_3[s-r]^3$，其中 $h_3$ 是 $r_+$、$s_+$、$s_-$的光滑函数. 现在令 $w = r_-/[s]^3$，则 $[s-r] = [s] - w[s]^3$，而且由(7.2.31)可得

$$w - h_3(w[s]^3, s_+, s_-)(1 - w[s]^2)^3 = 0.$$

显然，上式左端关于 $w$ 的导数在 $[s] = 0$ 时为 1，故利用隐函数定理知，当$[s]$充分小时，$w$ 可以被解为 $s_+$、$s_-$的光滑函数. □

**三、近似解序列的建立与估计**

有了上面的准备，就可以来建立近似解序列$\{r^{(\nu)}(x, y), s^{(\nu)}(x, y)\}$. 取 $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ 作为这个函数序列的定义域，其中

$$\Omega_0 = \{(x, y), -1 \leq x \leq 0, -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon\},$$

$$\Omega_+ = \{(x, y), 0 \leq x \leq \eta, 0 \leq y \leq \varepsilon - x\},$$

$$\Omega_- = \{(x, y), 0 \leq x \leq \eta, -\varepsilon + x \leq y \leq 0\},$$

而 $\eta$ 与 $\varepsilon$ 是满足 $0 \leq \eta \leq \varepsilon$ 的充分小的数.

作为序列的首项，取 $r^{(0)}(x, y) = 0$，而 $s^{(0)}(x, y)$由(7.2.19)决定. 对 $\nu \geq 0$ 递归地定义 $\sigma^{(\nu)}$、$r^{(\nu+1)}$、$s^{(\nu+1)}$ 如下：

$$\sigma^{(\nu)} = -\frac{\left[G\left(\frac{r^{(\nu)} - s^{(\nu)}}{2}\right)\cos\frac{r^{(\nu)} + s^{(\nu)}}{2}\right]}{\left[G\left(\frac{r^{(\nu)} - s^{(\nu)}}{2}\right)\sin\frac{r^{(\nu)} + s^{(\nu)}}{2}\right]}, \qquad (7.2.33)$$

$$\begin{cases} \partial_x r^{(\nu+1)}(x, y) + (\lambda_-^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y r^{(\nu+1)}(x, y) = 0; \\ \partial_x s^{(\nu+1)}(x, y) + (\lambda_+^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y s^{(\nu+1)}(x, y) = 0; \\ r^{(\nu+1)}(-1, y) = 0,\ s^{(\nu+1)}(-1, y) = s_0(y), \end{cases} \qquad (7.2.34)$$

其中 $\lambda_\pm^{(\nu)} = \lambda_\pm(r^{(\nu)}, s^{(\nu)})$.

以下的任务是证明序列$\{\sigma^{(\nu)}, r^{(\nu)}, s^{(\nu)}\}$能合理地定义，且该序列收敛. 为此，归纳证明以下的事实：

$$
F_1^{(\nu)}\begin{cases}
1)\ s^{(\nu)}=s^{(0)}\ 在\ \Omega_0\cup\Omega_+\ 中; \\
2)\ s^{(\nu)}\in C^1(\overline{\Omega}_-\setminus(0,0)); \\
3)\ |s^{(\nu)}(x,y)-s^{(0)}(x,y)|\le Cx; \\
4)\ |\partial_y(s^{(\nu)}-s^{(0)})(x,y)|\le C(x^3+y^2)^{-1/6}, \\
\quad 若(x,y)\ne(0,0).
\end{cases}
$$

$$
F_2^{(\nu)}\begin{cases}
1)\ r^{(\nu)}=0,\ 在\ \Omega_0\cup\Omega_+\ 中; \\
2)\ r^{(\nu)}\in C^1(\overline{\Omega}_-\setminus(0,0)); \\
3)\ |r^{(\nu)}(x,y)|\le Cx^{3/2}; \\
4)\ |\partial_y r^{(\nu)}(x,y)|\le Cx^{1/2},
\end{cases}
$$

其中常数$C$关于$\nu$是一致的. 显然,这些事实在$\nu=0$时成立. 现将证明:由它们在指标为$\nu$时成立,可推得指标为$\nu+1$时也成立.

**引理 7.2.6** 若$F^{(\nu)}$成立,则

$$|\sigma^{(\nu)}-\sigma^{(0)}|\le Cx. \tag{7.2.35}$$

**证明** 由于$r^{(\nu)}$、$s^{(\nu)}$在$\Omega_+$中与$\nu$无关,故由(7.2.33)可以写出

$$\sigma^{(\nu)}=H(r,s)|_{r=r^{(\nu)},\,s=s^{(\nu)}},\quad \sigma^{(0)}=H(r,s)|_{r=r^{(0)},\,s=s^{(0)}},$$

其中

$$H(r,s)=-\frac{\left[G\left(\dfrac{r-s}{2}\cos\dfrac{r+s}{2}\right)\right]}{\left[G\left(\dfrac{r-s}{2}\right)\sin\dfrac{r+s}{2}\right]}$$

为$r$、$s$的光滑函数,故

$$|\sigma^{(\nu)}-\sigma^{(0)}|\le C(|r^{(\nu)}|+|s^{(\nu)}-s^{(0)}|)\le Cx.\ \square$$

以$y=\eta^{(\nu)}(x,a,b)$记(7.2.34)第二个方程过$(a,b)$的特征线,则有如下引理成立:

**引理 7.2.7** 若$F^{(\nu)}$成立,则

$$|\eta^{(\nu)}(x, a, b) - \eta^{(0)}(x, a, b)| \leq Ca(a - x). \tag{7.2.36}$$

**证明** 由 $b = \eta^{(\nu)}(a, a, b)$ 可得

$$b - \eta^{(\nu)}(x, a, b)$$
$$= \int_x^a (\lambda_+^{(\nu)}(\alpha, \eta^{(\nu)}(\alpha, a, b)) - \sigma^{(\nu)}(\alpha))\mathrm{d}\alpha. \tag{7.2.37}$$

为估计 $\eta^{(\nu)}(x, a, b)$，在此引入另一个迭代过程，即暂时固定 $\nu$，令

$$\zeta_0(x, a, b) = \eta^{(0)}(x, a, b), \tag{7.2.38}$$

$$\zeta_{n+1}(x, a, b)$$
$$= b - \int_x^a (\lambda_+^{(\nu)}(\alpha, \zeta_n(\alpha, a, b)) - \sigma^{(\nu)}(\alpha))\mathrm{d}\alpha. \tag{7.2.39}$$

显然 $\zeta_0(x, a, b)$满足

$$\zeta_0(x, a, b) = b - \int_x^a (\lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_0(\alpha, a, b)) - \sigma^{(0)}(\alpha))\mathrm{d}\alpha,$$

从而

$$\zeta_0(x, a, b) - \zeta_{n+1}(x, a, b)$$
$$= \int_x^a (\lambda_+^{(\nu)}(\alpha, \zeta_n(\alpha, a, b) - \lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_0(\alpha, a, b)))\mathrm{d}\alpha$$
$$+ \int_x^a (\sigma^{(0)}(\alpha) - \sigma^{(\nu)}(\alpha))\mathrm{d}\alpha.$$

这里要证明 $\zeta_i(x, a, b)$的极限就是 $\eta^{(\nu)}(x, a, b)$，且极限函数满足(7.2.36)，为此提出命题

$$|\zeta_i(x, a, b) - \zeta_0(x, a, b)| \leq Ca(a - x), \tag{7.2.40}$$

并先关于 $i$ 归纳证明这个命题.

首先，(7.2.40)在 $i = 0$ 时，显然成立. 现若它对 $i = n$ 成立，则

$$\zeta_0(x, a, b) - \zeta_{n+1}(x, a, b)$$

$$= \int_x^a (\lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_n) - \lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_0))\mathrm{d}\alpha$$

$$+ \int_x^a (\lambda_+^{(\nu)}(\alpha, \zeta_n) - \lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_n))\mathrm{d}\alpha$$

$$+ \int_x^a (\sigma^{(0)}(\alpha) - \sigma^{(\nu)}(\alpha))\mathrm{d}\alpha. \tag{7.2.41}$$

利用引理 7.2.6 以及假定 $F^{(\nu)}$有

$$|\sigma^{(\nu)}(\alpha) - \sigma^{(0)}(\alpha)| \leq C\alpha, \tag{7.2.42}$$

$$|\lambda_+^{(\nu)}(\alpha, \zeta_n) - \lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_n)|$$

$$\leq C \| \nabla\lambda \|_{L^\infty}(|r^{(\nu)}(\alpha, \zeta_n)| + |s^{(\nu)}(\alpha, \zeta_n) - s^{(0)}(\alpha, \zeta_n)|)$$

$$\leq C\alpha. \tag{7.2.43}$$

另一方面，

$$\left|\int_x^a (\lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_n) - \lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_0))\mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leq \left|\int_x^a (\lambda_{+s}^{(0)} \cdot s_y^{(0)})(\alpha, (\zeta_0 + \theta(\zeta_n - \zeta_0)) \cdot (\zeta_n - \zeta_0)\mathrm{d}\alpha\right|.$$

由 $i = n$ 时的(7.2.40)知，$\zeta_0 + \theta(\zeta_n - \zeta_0)$ 满足(7.2.26)，于是由引理 7.2.2 的注可得

$$\left|\int_x^a (\lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_n) - \lambda_+^{(0)}(\alpha, \zeta_0))\mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leq \left(\ln\frac{3}{2} + C\sqrt{a}\right)a(a - x). \tag{7.2.44}$$

将(7.2.42)～(7.2.44)代入(7.2.41)，即知(7.2.40)对 $i = n + 1$ 也成立，故命题(7.2.40)对一切 $i$ 成立.

现证$\{\zeta_n(\alpha, a, b)\}$的收敛性. 事实上

$$|\zeta_{n+1}(x, a, b) - \zeta_n(x, a, b)|$$

$$= \left|\int_x^a (\lambda_+^{(\nu)}(\alpha, \zeta_n) - \lambda_+^{(\nu)}(\alpha, \zeta_{n-1}))\mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leq \left|\int_y^a (\partial_y \lambda_+^{(\nu)})(\alpha, (\zeta_{n-1} + \theta(\zeta_n - \zeta_{n-1}))\right.$$

$$\left. \times (\zeta_n - \zeta_{n-1}) \mathrm{d}\alpha \right|$$

$$\leq \int_0^a |\partial_y \lambda_+^{(\nu)} (\alpha, (\zeta_{n-1} + \theta(\zeta_n - \zeta_{n-1})))| \mathrm{d}\alpha$$

$$\times \| \zeta_n - \zeta_{n-1} \|_{L^\infty}. \qquad (7.2.45)$$

不等式右端的积分不超过

$$\int_0^a |\partial_y \lambda_+^{(0)} (\alpha, (\zeta_{n-1} + \theta(\zeta_n - \zeta_{n-1})))| \mathrm{d}\alpha$$

$$+ \int_0^a |(\partial_y \lambda_+^{(\nu)} - \partial_y \lambda_+^{(0)})(\alpha, (\zeta_{n-1} + \theta(\zeta_n - \zeta_{n-1})))| \mathrm{d}\alpha.$$

$$(7.2.46)$$

由引理 7.2.2 的注知,它可被 $\ln \frac{3}{2} + C\sqrt{a}$ 所控制. 此外,由假定 $F^{(\nu)}$ 知

$$|\partial_y \lambda_+^{(\nu)} - \partial_y \lambda_+^{(0)}| \leq |\lambda_{+,r}^{(\nu)} r_y^{(\nu)} + \lambda_{+,s}^{(\nu)} s_y^{(\nu)} - \lambda_{+,s}^{(0)} s_y^{(0)}|$$

$$\leq C(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2}),$$

故在 $\alpha$ 充分小时

$$\left|\int_0^a |\partial_y \lambda_+^{(\nu)} (\alpha, (\zeta_{n-1} + \theta(\zeta_n - \zeta_{n-1})))| \mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leq \ln \frac{3}{2} + C\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}.$$

将它代入(7.2.46)就可得到序列$\{\zeta_n\}$的压缩性:

$$\| \zeta_{n+1} - \zeta_n \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \| \zeta_n - \zeta_{n-1} \|_{L^\infty},$$

从而$\{\zeta_n\}$收敛. 显然,$\{\zeta_n(x, y)\}$的极限是(7.2.37)的唯一解,而估计(7.2.36)可由(7.2.40)取极限得到. □

**注** 将上述引理与(7.2.21)相结合,有

$$\eta_+^{(\nu)}(x, a, b) - b = \pm(\sqrt{a}(a - x) + O_1(|b|^{1/3}(a - x))) + O(a(a - x)), \tag{7.2.47}$$

它表明,当 $a > 0$ 时,从 $(a, b)$ 发出的 $\lambda_\pm$ 的左向特征只能在 $x = 0$ 上离开 $\Omega_\pm$. 这一事实在估计 $s^{(\nu+1)}$ 及其导数时要用到.

**引理 7.2.8**　若 $F^{(\nu)}$ 成立,则

$$|(s^{(\nu+1)} - s^{(0)})(x, y)| \le Cx, \tag{7.2.48}$$

$$|r^{(\nu+1)}| \le Cx^{3/2}. \tag{7.2.49}$$

**证明**　记 $v(x, y) = (s^{(\nu+1)} - s^{(0)})(x, y)$, 则 $v$ 满足

$$\begin{cases}\partial_x v + (\lambda_+^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y v = (-\lambda_+^{(\nu)} + \lambda_+^{(0)} + \sigma^{(\nu)} - \sigma^{(0)})\partial_y s^{(0)}, \\ v(0, y) = 0,\end{cases} \tag{7.2.50}$$

沿特征线积分可得

$$|v(x, y)| \le \int_0^x |(-\lambda_+^{(\nu)} + \lambda_+^{(0)} + \sigma^{(\nu)} - \sigma^{(0)}) \times (\partial_y s^{(0)})(\alpha, \eta(\alpha, a, b))| \mathrm{d}\alpha.$$

利用假定 $F_1^{(\nu)}$、$F_2^{(\nu)}$ 可知

$$|\lambda_+^{(\nu)} - \lambda_+^{(0)}| \le C\|\nabla\lambda\|_{L^\infty}(\|r^{(\nu)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu)} - s^{(0)}\|_{L^\infty}) \le C\alpha.$$

此外,定理 7.1.2 指出

$$|\partial_y s^{(0)}(\alpha, \eta(\alpha, x, y))| \le C(\alpha^3 + \eta^2)^{-1/3} \le C\alpha^{-1}.$$

结合引理 7.2.6 即得

$$|v(x, y)| \le C\int_0^x \alpha \cdot \alpha^{-1}\mathrm{d}\alpha \le Cx.$$

再考察对 $r^{(\nu+1)}$ 的估计:在 $\Omega_0 \cup \Omega_+$ 中 $r^{(\nu+1)} \equiv 0$. 在 $\Omega_-$ 中

$r^{(\nu+1)}$ 通过解方程

$$\partial_x r^{(\nu+1)} + (\lambda_-^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y r^{(\nu+1)} = 0 \tag{7.2.51}$$

的一个初边值问题所决定.此时,在 $x=0$ 上 $r^{(\nu+1)}=0$,而在 $y=0$ 上边界条件可由 Rankine-Hugoniot 条件导出.记过$(a, b)$的 $\lambda_-$ 特征线的方程为 $l_-: y = \eta_-(x, a, b)$,若该特征线与 $x=0$ 交于$(\zeta, 0)$点,则由引理 7.2.5 知,在$(\xi, 0)$有

$$|r^{(\nu+1)}| \leq C|[s^{(\nu+1)}]^3|. \tag{7.2.52}$$

另一方面,引理 7.2.1 指出 $[s^{(0)}] \leq C\xi_0^{1/2}$. 与前面已得到的估计(7.2.48)相结合,则有

$$[s^{(\nu+1)}] \leq C\xi_0^{1/2}.$$

将它代入(7.2.52)即得(7.2.49)在 $y=0$ 上成立.然后沿 $\lambda_-$ 特征线积分(7.2.51)可得(7.2.49)在 $\Omega_-$ 中成立.□

关于 $s^{(\nu+1)}$ 与 $r^{(\nu+1)}$ 的导数估计,有如下引理:

**引理 7.2.9** 若 $F^{(\nu)}$ 成立,则

$$|\partial_{x,y}(s^{(\nu+1)} - s^{(0)})(x, y)| \leq C(x^3 + y^2)^{-1/6}, \tag{7.2.53}$$

$$|\partial_{x,y}(r^{(\nu+1)})(x, y)| \leq C\sqrt{x}. \tag{7.2.54}$$

**证明** 设 $v = \partial_y(s^{(\nu+1)} - s^{(0)})$, 则 $v$ 满足

$$\partial_x v + (\lambda_+^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y v = (-\lambda_+^{(\nu)} + \lambda_+^{(0)} + \sigma^{(\nu)} - \sigma^{(0)})s_{yy}^{(0)} - \partial_y\lambda_+^{(\nu)} v + \partial_y(\lambda_+^{(\nu)} - \lambda_+^{(0)})s_y^{(0)}. \tag{7.2.55}$$

对上式求积分,得

$$v(a, b) = \int_0^a [(-\lambda_+^{(\nu)} + \lambda_+^{(0)} + \sigma^{(\nu)} - \sigma^{(0)})s_{yy}^{(0)} - \partial_y\lambda_+^{(\nu)} v + \partial_y(\lambda_+^{(\nu)} - \lambda_+^{(0)})s_y^{(0)}]\mathrm{d}\alpha,$$

其中在积分号下的函数 $s^{(\nu)}$ 与 $s^{(0)}$ 的变元为$(\alpha, \eta(\alpha, a, b))$.

利用定理 7.1.2 和假定 $F^{(\nu)}$，可得

$$\left|\int_0^a (-\lambda_+^{(\nu)}+\lambda_+^{(0)}+\sigma^{(\nu)}-\sigma^{(0)})s_{yy}^{(0)}\mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leq \int_0^a C\alpha\cdot(\alpha^3+\eta^2)^{-5/6}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leq C\int_0^a \alpha\mathrm{d}\alpha\cdot(a^3+b^2)^{-5/6}$$

$$\leq Ca^2(a^3+b^2)^{-5/6}\leq C(a^3+b^2)^{-1/6},$$

$$\left|\int_0^a \partial_y(\lambda_+^{(\nu)}-\lambda_+^{(0)})s_y^{(0)}\mathrm{d}\alpha\right|$$

$$\leq \int_0^a |(\lambda_r^{(\nu)}r_y^{(\nu)}+\lambda_s^{(\nu)}s_y^{(\nu)}-\lambda_s^{(0)}s_y^{(0)})|\cdot|s_y^{(0)}|\mathrm{d}\alpha$$

$$\leq \int_0^a |(\lambda_r^{(\nu)}r_y^{(\nu)}+\lambda_s^{(\nu)}(s_y^{(\nu)}-s_y^{(0)})+(\lambda_s^{(\nu)}-\lambda_s^{(0)})s_y^{(0)})|$$

$$\times|s_y^{(0)}|\mathrm{d}\alpha$$

$$\leq C\int_0^a |(\alpha^3+\eta^2)^{-1/6}+\alpha^{-1/2}+\alpha(\alpha^3+\eta^2)^{-1/3}|$$

$$\times(\alpha^3+\eta^2)^{-1/3}\mathrm{d}\alpha$$

$$\leq C\int_0^a \alpha^{-1/2}\mathrm{d}\alpha\cdot(a^3+b^2)^{-1/3}\leq C(a^3+b^2)^{-1/6}.$$

这样，就建立了

$$|v|\leq\int_0^a g(\alpha)|v|\mathrm{d}\alpha+h(a), \tag{7.2.56}$$

其中 $h(a)\leq C(a^3+b^2)^{-1/6}$，且由引理 7.2.3 知

$$\int_0^a g(\alpha)\mathrm{d}\alpha\leq\ln\frac{3}{2}+C\sqrt{a},$$

故在 $a$ 充分小时，可得到(7.2.53)中关于 $y$ 的导数的估计. 相仿地，可以建立 $s^{(\nu+1)}-s^{(0)}$ 关于 $x$ 导数的估计.

现在考虑 $r^{(\nu+1)}$ 的导数估计. 由(7.2.29)式有

$$r_+^{(\nu+1)}(x)=f(s_+^{(\nu+1)}(x),\ s_-^{(\nu+1)}(x))[s^{(\nu+1)}]^3.$$

将它关于 $x$ 求导,并利用前面已证得的(7.2.53)可知,在 $y=0$ 上有下式成立:

$$\begin{aligned}|r_x^{(\nu+1)}(x)|&\le C(3[s^{(\nu+1)}]^2|[s_x^{(\nu+1)}]|\\&\quad+[s^{(\nu+1)}]^3(|s_{-x}^{(\nu+1)}(x)|+|s_{+x}^{(\nu+1)}(x)|))\\&\le C\sqrt{x}.\end{aligned}\tag{7.2.57}$$

如前,利用沿 $\lambda_-$ 特征线积分的方法即可建立 $r_x^{(\nu+1)}$ 在整个区域 $\Omega$ 中的估计.

最后,由于 $|\lambda_-^{(\nu)}-\sigma^{(\nu)}|$ 有正下界,故 $r^{(\nu+1)}$ 关于 $y$ 的导数的估计也可立刻得到. □

这样,利用引理 7.2.6 到引理 7.2.9 的结论,就证明了前面所作的归纳假定 $F_1^{(\nu)}$、$F_2^{(\nu)}$ 对一切 $\nu$ 均成立.

**定理 7.2.1 的证明:**

证明定理 7.2.1 的关键在于建立近似解序列 $\{r^{(\nu)},\ s^{(\nu)}\}$ 的收敛性,为此,我们逐个地建立对 $|\sigma^{(\nu)}-\sigma^{(\nu-1)}|$、$\|s^{(\nu+1)}-s^{(\nu)}\|_{L^\infty}$、$\|r^{(\nu+1)}-r^{(\nu)}\|_{L^\infty}$ 的估计:

$$\begin{aligned}&|\sigma^{(\nu)}-\sigma^{(\nu-1)}|\\&\le\frac{1}{2}\|\lambda'_+(s_0)\|_{L^\infty}\|s^{(\nu)}-s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}(1+O(x))\\&\quad+C\|r^{(\nu)}-r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty},\end{aligned}\tag{7.2.58}$$

$$\begin{aligned}&\|s^{(\nu+1)}-s^{(\nu)}\|_{L^\infty}\\&\le\frac{9}{10}(\|r^{(\nu)}-r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}+\|s^{(\nu)}-s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}),\end{aligned}\tag{7.2.59}$$

$\|r^{(\nu+1)}-r^{(\nu)}\|_{L^\infty}$

$$\leq \frac{1}{20}(\|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}). \tag{7.2.60}$$

首先,类似于引理 7.2.6 容易建立:

$$|\sigma^{(\nu)} - \sigma^{(\nu-1)}| \leq C(\|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}). \tag{7.2.61}$$

现在来建立更精确的估计(7.2.58),将 $\sigma^{(\nu)} - \sigma^{(\nu-1)}$ 写成:

$$\begin{aligned}
&|\sigma^{(\nu)} - \sigma^{(\nu-1)}| \\
&= |H(r^{(\nu)}, s^{(\nu)}) - H(r^{(\nu-1)}, s^{(\nu-1)})| \\
&\leq C|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}| + |H(r^{(\nu)}, s^{(\nu)}) - H(r^{(\nu)}, s^{(\nu-1)})| \\
&\leq C|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}| + |H(0, s^{(\nu)}) - H(0, s^{(\nu-1)})| \\
&\quad + |[H(r^{(\nu)}, s^{(\nu)}) - H(r^{(\nu)}, s^{(\nu-1)})] \\
&\quad - [H(0, s^{(\nu)}) - H(0, s^{(\nu-1)})]|.
\end{aligned} \tag{7.2.62}$$

利用(7.2.18)中的记号,有

$$\begin{aligned}
&H(0, s^{(\nu)}) - H(0, s^{(\nu-1)}) \\
&= \frac{[f(m)(s^{(\nu)})]}{[m(s^{(\nu)})]} - \frac{[f(m)(s^{(\nu-1)})]}{[m(s^{(\nu-1)})]} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{[f(m)]}{[m]}\right)_{s=s^*}(s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\frac{[f(m)]}{[m]}\right)_{m=m^*}\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}\right)_{s=s^*}(s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}) \\
&= \left(\frac{[m]\cdot f'(m) - [f(m)]}{[m]^2}\right)_{m=m^*}\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}\right)_{s=s^*} \\
&\quad \times (s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}),
\end{aligned}$$

其中 $s^* = s^{(\nu-1)} + \theta(s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)})$, $0 \leq \theta \leq 1$, $m^* = m(s^*)$.
于是

$$
\begin{aligned}
&|H(0, s^{(\nu)}) - H(0, s^{(\nu-1)})| \\
&\leq \left|\frac{1}{2}f''(m_0) + O([m])\right| \cdot \left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}\right| \cdot |s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}| \\
&= \left(\frac{1}{2}\lambda'_+(s_0) + O(|s^{(\nu)} - s^{(0)}|)\right)|s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}|.
\end{aligned}
$$

将它代入到(7.2.62)中，即得(7.2.58).

为证(7.2.59)，令 $v = s^{(\nu+1)} - s^{(\nu)}$，则 $v$ 满足

$$
\partial_x v + (\lambda_+^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y v = (\lambda_+^{(\nu-1)} - \lambda_+^{(\nu)} + \sigma^{(\nu)} - \sigma^{(\nu-1)})\partial_y s^{(\nu)}.
$$

沿特征线积分，可得

$$
\begin{aligned}
|v| \leq &\int_0^a |(\lambda_+^{(\nu-1)} - \lambda_+^{(\nu)} + \sigma^{(\nu)} - \sigma^{(\nu-1)}) \\
&\times \partial_y(s^{(\nu)} - s^{(0)})(\alpha, \eta(\alpha, a, b))|\mathrm{d}\alpha \\
&+ \int_0^a |((\lambda_+^{(\nu-1)} - \lambda_+^{(\nu)})(\sigma^{(\nu-1)} - \sigma^{(\nu)}) \\
&\times \partial_y s^{(0)}(\alpha, \eta(\alpha, a, b)))|\mathrm{d}\alpha.
\end{aligned}
\tag{7.2.63}
$$

上式右端关于 $\partial_y s^{(0)}$、$\partial_y(s^{(\nu)} - s^{(0)})$、$\sigma^{(\nu)} - \sigma^{(\nu-1)}$ 的估计是已有的，而

$$
\begin{aligned}
&|\lambda_+^{(\nu)} - \lambda_+^{(\nu-1)}| \\
&\leq (|\partial_y \lambda_+^{(0)}| + O(x))(|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}| + |s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}|),
\end{aligned}
$$

故将它们与引理 7.2.3 相结合，可得

$$
\begin{aligned}
|v| \leq &\left(\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} + C\sqrt{a}\right) \\
&\times (\|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}).
\end{aligned}
$$

由于 $\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} < \frac{3}{4}$，故在 $a$ 充分小时(7.2.59)成立.

最后，令 $v = r^{(\nu+1)} - r^{(\nu)}$，则 $v$ 满足

$$\partial_x v + (\lambda_-^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y v = (\lambda_-^{(\nu-1)} - \lambda_-^{(\nu)} + \sigma^{(\nu)} - \sigma^{(\nu-1)})\partial_y r^{(\nu)}. \tag{7.2.64}$$

在 $x=0$ 上 $v=0$. 沿 $\lambda_-$ 特征线积分(7.2.64),若左向特征线先碰到 $x$ 轴,则

$$\begin{aligned}|v| \le\ & |r^{(\nu+1)}(x,0_-) - r^{(\nu)}(x,0_-)| \\ & + \int_x^a |(\lambda_-^{(\nu-1)} - \lambda_-^{(\nu)})\partial_y r^{(\nu)}(\alpha, \eta(\alpha,a,b))|\mathrm{d}\alpha \\ & + \int_x^a |(\sigma^{(\nu-1)} - \sigma^{(\nu)})\partial_y r^{(\nu)}(\alpha, \eta(\alpha,a,b))|\mathrm{d}\alpha.\end{aligned} \tag{7.2.65}$$

否则,上式右端第一项不出现,且第二项中的积分下限应取为零,由于 $|\partial_y r^{(\nu)}| \le C\sqrt{a}$,故(7.2.65)式中的积分被

$$Ca^{3/2}(\|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty})$$

所控制. 此外,(7.2.29)指出了:

$$\begin{aligned}&|r^{(\nu+1)}(x,0_-) - r^{(\nu)}(x,0_-)| \\ &\le C|[s^{(\nu+1)}]^3 - [s^{(\nu)}]^3| \le Ca\|s^{(\nu+1)} - s^{(\nu)}\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

综合这些事实,可得到

$$\begin{aligned}&|(r^{(\nu+1)} - r^{(\nu)})(a,b)| \\ &\le Ca^{3/2}\|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}) \\ &\quad + Ca\|s^{(\nu+1)} - s^{(\nu)}\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

故在 $a$ 充分小时(7.2.60)成立.

将(7.2.58)到(7.2.60)所示的估计相加,则得到

$$\begin{aligned}&\|r^{(\nu+1)} - r^{(\nu)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu+1)} - s^{(\nu)}\|_{L^\infty} \\ &\le \frac{19}{20}(\|r^{(\nu)} - r^{(\nu-1)}\|_{L^\infty} + \|s^{(\nu)} - s^{(\nu-1)}\|_{L^\infty}).\end{aligned} \tag{7.2.66}$$

这就得到了序列$\{r^{(\nu)}(x, y), s^{(\nu)}(x, y)\}$的收敛性. 相应地,$\{\sigma^{(\nu)}\}$的收敛性也立即随之而得出. 记这些序列的极限为$r(x, y)$、$s(x, y)$和$\sigma(x)$,则$r(x, y)$、$s(x, y)$在$\Omega_-$中连续,$\sigma(x)$在$x \geq 0$时连续. 在由(7.2.34)导出的积分表达式中,令$\nu$趋于无穷,即可推得$(r(x, y), s(x, y))$为相应积分方程组的解,从而,$r(x, y)$、$s(x, y)$在激波两侧也是连续可微的,且满足:

$$\begin{cases}\partial_x r(x, y) + (\lambda_- - \sigma)\partial_y r(x, y) = 0; \\ \partial_x s(x, y) + (\lambda_+ - \sigma)\partial_y s(x, y) = 0.\end{cases} \tag{7.2.67}$$

此外,在激波$y = \phi(x)$上,Rinkine-Hugoniot 条件

$$\sigma = -\frac{\left[G\left(\frac{r-s}{2}\right)\cos\frac{r+s}{2}\right]}{\left[G\left(\frac{r-s}{2}\right)\sin\frac{r+s}{2}\right]} \tag{7.2.68}$$

成立,它正是(7.2.33)式的极限.

回到原始坐标系,就得到方程组(7.2.8)的弱解. 对条件$F^{(\nu)}$中不等式以及(7.2.35)取极限,即得定理7.2.1中所示的估计. □

# 附　录

# 仿微分算子的回顾

在非线性偏微分方程各类问题的讨论中，一个好的线性化方法往往起着重要的作用，对非线性方程解的奇性分析也是如此，特别是在完全非线性方程奇性分析问题的研究中，由于特征与方程的解有关，因而也可能带有某种奇性，这种情况甚至给解的奇性的描述都带来困难. J. M. Bony 基于分布的二进分解的方法，建立了仿线性化与仿微分算于的理论，它在讨论奇性传播问题中十分有效. 因为在这种线性化的过程中所舍弃的一般是具有较高正则性的项，而这种“舍弃”往往不影响奇性分析. 这样，一个非线性问题就可化成线性问题进行处理，或至少可以借鉴许多已在线性问题的研究中行之有效的方法. 以后 S. Alinhac 又在此基础上发展了仿复合的理论，并用于讨论完全非线性方程余法型分布的传播. 为了读者的阅读方便，在下面对仿微分算子的一些基本结果作一概要的回顾，但对其中的定理一般不给出证明或进一步的解释. 读者可参见文献[16]、[57]、[109]等.

## §1　二 进 分 解

记 $B(0,1)\subset R^n$ 为以原点为心的单位球，取常数 $\kappa>1$，作二进环体：

$$\mathscr{C}_j=\{\xi\in R^n;\kappa^{-1}2^j\leq|\xi|\leq\kappa 2^{j+1}\},\qquad\text{(A.1)}$$

其中 $j$ 为正整数，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$|\xi|=\left(\sum\xi_j^2\right)^{1/2}$，则二进环体 $\mathscr{B}\cup\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\mathscr{C}_j\right)$ 覆盖了整个 $R^n$.

**定理 A.1** 存在函数 $\psi(\xi)$、$\phi(\xi) \in C_0^\infty$, $0 \leqslant \psi, \phi \leq 1$, 使得

(1) $\mathrm{supp}\psi \subset \mathscr{B}(0,1)$, $\mathrm{supp}\phi \subset \mathscr{C}_0$;

(2) $\psi(\xi) + \sum\limits_{j=0}^{n}\phi(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in R^n$;

(3) 对任意的正整数 $l$,有

$$\psi(\xi) + \sum_{j=0}^{l-1}\phi(2^{-j}\xi) = \psi(2^{-l}\xi), \forall \xi \in R^n.$$

**定义 A.1** 对于任意的分布 $u \in S'(R^n)$,可以定义 $u$ 的二进分解(或称环形分解, Littlewood-Paley 分解):

$$u = \sum_{j=-1}^{\infty} u_j(x), \tag{A.2}$$

其中 $u_j(x)$ 由

$$\hat{u}_{-1} = \psi(\xi)\hat{u}(\xi), \quad \hat{u}_j(\xi) = \phi(2^{-j}\xi)\hat{u}(\xi) \quad (j \geq 0)$$

决定,而 $\psi$、$\phi$ 是定理 A.1 中给出的函数.

**定理 A.2** 若 $u \in H^s(R^n)$ 有二进分解(A.2),则存在常数 $c_j$ 及 $C$,使得

$$\| u_j \|_0 \leq c_j 2^{-js}, \; j = -1, 0, 1, \cdots \tag{A.3}$$

且

$$\Big(\sum_{j=-1}^{n} c_j^2\Big)^{1/2} \leq C \| u \|_s. \tag{A.4}$$

**定理 A.3** 设 $s$ 为给定的实数,$u \in H^s(R^n)$,则下述论断是等价的:

(1) $u \in H^s(R^n)$;

(2) $u$ 可分解为 $\sum\limits_{j=-1}^{\infty} u_j$, 其中 $u_j$ 满足:

$$\mathrm{supp}\hat{u}_j \subset \mathscr{B}(0, \kappa 2^j), \kappa > 1,$$

$$\| u_j \|_0 \leq c_j \cdot 2^{-js}, \; \sum_{j=-1}^{\infty} c_j^2 \leq \infty; \tag{A.5}$$

(3) 存在自然数 $m>s$，使得 $u$ 可分解为 $u=\sum_{j=-1}^{\infty}u_j$，$u_j\in C^{\infty}$，且对 $|\lambda|\leq m$，有

$$\| D^{\lambda}u_j \|_0 \leq c_{j\lambda}\cdot 2^{-js+j|\lambda|},\qquad \sum_{j=-1}^{\infty}c'_{j\lambda}<\infty. \tag{A.6}$$

**定理 A.4** 设 $\rho>0$ 为非整数，$u\in C^{\rho}(R^n)$，则对 $u$ 的二进分解(A.2)，有下式成立：

$$\| u_j \|_{L^{\infty}} \leq C2^{-j\rho}\| u \|_{C^{\rho}}\ (j=-1,0,1,\cdots). \tag{A.7}$$

**定理 A.5** 设 $\rho>0$ 为非整数，$u\in C^{\rho}(R^n)$，则下述论断是等价的：

(1) $u\in C^{\rho}(R^n)$；

(2) $u$ 可分解为 $\sum_{j=-1}^{\infty}u_j$，其中 $u_j$ 满足：

$$\mathrm{supp}\hat{u}_j\subset \mathscr{C}_j,\quad \| u_j \|_{L^{\infty}}\leq C\cdot 2^{-j\rho};$$

(3) $u$ 可分解为 $\sum_{j=-1}^{\infty}u_j$，其中 $u_j$ 满足：

$$\mathrm{supp}\hat{u}_j\subset \mathscr{B}(0,\kappa 2^j),\ \kappa>1,$$

$$\| u_j \|_{L^{\infty}}\leq C\cdot 2^{-j\rho};$$

(4) 存在自然数 $m>\rho$，使得 $u$ 可分解为 $u=\sum_{j=-1}^{\infty}u_j$，$u_j\in C^{\infty}$，且对 $|\lambda|\leq m$，有

$$\| D^{\lambda}u_j \|_{L^{\infty}}\leq C_{\lambda}2^{-j\rho+j|\lambda|}. \tag{A.8}$$

定理 A.5 中的指数 $\rho$ 取整数时，需要用 Zygmund 条件来代替 Hölder 条件. 若 $L^{\infty}$ 函数 $u$ 满足

$$|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|\leq M|y|,\ |y|>0, \tag{A.9}$$

则称 $u$ 满足 Zygmund 条件. Lipschitz 条件蕴含 Zygmund 条件,但反之不对.

**定理 A.6** 下列论断是等价的:

(1) $u \in L^\infty(R^n)$, 且

$$\sup_{|y|>0} |y|^{-1} \cdot |u(x+y)+u(x-y)-2u(x)| < \infty;$$

(2) $u$ 可分解为 $\sum_{j=-1}^{\infty} u_j$, 其中 $u_j$ 满足:

$$\mathrm{supp}\hat{u}_j \subset \mathscr{C}_j, \quad \| u_j \|_{L^\infty} \leq C \cdot 2^{-j};$$

(3) $u$ 可分解为 $\sum_{j=-1}^{\infty} u_j$, 其中 $u_j$ 满足:

$$\mathrm{supp}\hat{u}_j \subset \mathscr{B}(0, \kappa 2^j), \ \kappa > 1,$$

$$\| u_j \|_{L^\infty} \leq C \cdot 2^{-j};$$

(4) $u$ 可分解为 $u = \sum_{j=-1}^{\infty} u_j$, $u_j \in C^2(R^n)$,且对 $|\lambda| \leq 2$ 有

$$\| D^\lambda u_j \|_{L^\infty} \leq C_\lambda 2^{-j+j|\lambda|}. \tag{A.10}$$

利用二进分解也可以考虑函数的局部 $H^s$、$C^\rho$ 的性质,或微局部 $H^s$、$C^\rho$ 的性质.

**定理 A.7** 设 $s$、$s'$ 为实数, $s' \geq s$, 则下面的论断等价:

(1) $u \in H^s_{x_0} \cap H^{s'}_{(x_0,\xi_0)}$;

(2) 存在 $\phi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, 它在 $x_0$ 附近为 1,且存在 $\xi_0$ 的一个锥邻域 $\Gamma$,使得

$$\phi u = \sum_{j=-1}^{\infty} v_j + \sum_{j=-1}^{\infty} v'_j, \tag{A.11}$$

其中

$$\| v_j \|_0 \leq c_j 2^{-js}, \ \mathrm{supp}\hat{v}_j \subset \mathscr{C}_j,$$

$$\| v'_j \|_0 \leq c_j 2^{-js'}, \ \mathrm{supp}\hat{v}'_j \subset \mathscr{C}_j \cap \Gamma^c, \ \sum c_j^2 < \infty,$$

这里 $\Gamma^c$ 表示 $\Gamma$ 的余集.

关于函数的局部或微局部 $C^\rho$ 性质与它的二进分解的关系是类似的,读者可自行写出.

记函数 $u$ 的二进分解的部分和 $\sum_{j=-1}^{k-1} u_j$ 为 $S_k u$,即

$$S_k u = \psi(D)u + \sum_{j=0}^{k} \phi(2^{-j}D)u,$$

则 $S_k u \in S(R^n)$,且当 $u \in H^s$,或 $u \in C^\rho$ 时,$S_k u$ 在 $H^s$ 或 $C^\rho$ 中以 $u$ 为极限,所以 $S_k u$ 是非光滑函数 $u$ 的一个光滑逼近,且有:

**定理 A.8** 若 $u \in H^s$, 且 $s > 0$, 则

$$\| S_k u - u \|_0 \leq C \cdot 2^{-ks} \| u \|_s, \tag{A.12}$$

又若 $u \in C^\rho$, 且 $\rho > 0$, 则

$$\| S_k u - u \|_{L^\infty} \leq C \cdot 2^{-k\rho} \| u \|_{C^\rho}. \tag{A.13}$$

**定理 A.9** 设 $u \in H^s$, $\operatorname{supp} u \subset F$, 则对任意 $N > 0$, 有

$$\| 2^{js}(1 + 2^j d(x, F))^N u_j(x) \| \leq c_{jN}, \ \sum_j c_{jN}^2 < \infty, \tag{A.14}$$

其中 $d(x, F)$为 $x$ 点到 $F$ 的距离.

## § 2 仿微分算子与仿线性化

以下给出仿积算子与仿微分算子的定义,仿微分算于一般可以有几种等价的定义方法.它可以利用函数的二进分解来定义,可以利用函数 Fourier 变换的积分来定义,也可以将它作为一类特定的 $OpS^0_{1,1}$ 类拟微分算子来定义.下面采用第一种方法给出仿微分算子的级数形式的定义.

**定义 A.2** 设 $a(x)$、$u(x)$的二进分解分别为 $a = \sum a_j$, $u = \sum u_j$, 对于任意的正整数 $N$,令

$$T_a u = \sum_{q=N-1}^{\infty} \sum_{p=-1}^{q-N} a_p u_q, \tag{A.15}$$

则称 $T_a u$ 为 $a$ 对 $u$ 所作的仿积,也称 $T_a$ 为仿乘法算子.

**定理 A.10** 设 $\sigma$、$s$ 为任意实数,$a \in L^\infty(R^n)$,则 $T_a$ 是 $C^\sigma \to C^\sigma$ 与 $H^s \to H^s$ 的有界算子,且算子模 $\|T_a\| \leq C\|a\|_{L^\infty}$.

在定义 A.2 中的 $N$,以及在定义中涉及的二进分解中不同的 $\kappa$, $\phi$, $\psi$ 都会引起所定义的仿积 $T_a u$ 的差别,但是当 $a \in C^\rho$ 时,这个差别只是 $C^\sigma \to C^{\sigma+\rho}$ 或 $H^s \to H^{s+\rho}$ 的有界算子.以下简称这种算子为 $\rho$-正则算子.

**定理 A.11** 记

$$\begin{aligned} r(a, u) &= au - T_a u - T_u a, \\ r'(a, u) &= au - T_a u, \end{aligned} \tag{A.16}$$

(1) 若 $a \in C^\rho(R^n)$, $\rho > 0$, $u \in C^\sigma(R^n)$,则有:

(a) 若 $\sigma \geq 0$,则 $\|r(a, u)\|_{C^{\rho+\sigma}} \leq C\|a\|_{C^\rho}\|u\|_{C^\sigma}$;

(b) 若 $-\rho < \sigma < 0$,则 $\|r'(a, u)\|_{C^{\rho+\sigma}} \leq C\|a\|_{C^\rho}\|u\|_{C^\sigma}$;

(c) 若 $\sigma = 0$,则 $\|r'(a, u)\|_{C^{\rho+\sigma-\varepsilon}} \leq C\|a\|_{C^\rho}\|u\|_{C^\sigma}$

($\varepsilon > 0$ 为任意小的正数).

(2) 若 $a \in H^t(R^n)$, $t > n/2$, $u \in H^s(R^n)$,则有:

(a) 若 $s \geq n/2$,则 $\|r(a, u)\|_{t+s-n/2} \leq C\|a\|_t\|u\|_s$;

(b) 若 $-t + n/2 < s < n/2$,

则 $\|r'(a, u)\|_{t+s-n/2} \leq C\|a\|_t\|u\|_s$;

(c) 若 $s = n/2$,则 $\|r'(a, u)\|_{t-\varepsilon} \leq C\|a\|_t\|u\|_s$

($\varepsilon > 0$ 为任意小的正数).

**定理 A.12** 设 $a \in C^\rho(R^n)$, $b \in C^\rho(R^n)$, $\rho > 0$,则算子 $T_a \circ T_b - T_{ab}$ 是 $\rho$-正则算子,且 $\|T_a \circ T_b - T_{ab}\| \leq C\|a\|_{C^\rho}\|b\|_{C^\rho}$.

**定理 A.13** 设 $a \in C^\rho(R^n)$, $\rho > 0$,则对所有的正实数,算子 $T_a$ 的共轭算子 $T_a^*$ 是 $H^s$ 有界的,算子 $T_a - T_a^*$ 是 $H^s \to H^{s+\rho}$ 有界算子,且 $\|T_a - T_a^*\| \leq C\|a\|_{C^\rho}$.

**定理 A.14** 设 $a$、$b\in C^{\rho,k}$, $\rho>0$, $k$ 为非负整数，则有：

(1) $T_a$ 是 $C^{\sigma,k}\to C^{\sigma,k}$ 或 $H^{s,k}\to H^{s,k}$ 的线性连续映射；

(2) 算子 $R=T_a\circ T_b-T_{ab}$ 是 $C^{\sigma,k}\to C^{\sigma+\rho,k}$ 或 $H^{s,k}\to H^{s+\rho,k}$ 的线性连续映射.

**定理 A.15** 设 $a\in C^\rho(R^n)$, $\rho>0$, $v(x')\in C^\sigma(R^{n-1})$（或 $H^s(R^{n-1})$），则有：

$$T_a v\big|_{x_n=0}=T_{(a|x_n=0)}v+Rv,\tag{A.17}$$

其中 $R$ 是 $\rho$ 正则算子.

**定理 A.16** 对于仿积，有 Leibniz 公式成立：

$$D^\alpha(T_a u)=\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha}\frac{\alpha!}{\alpha'!\,\alpha''!}T_{D^{\alpha'}a}D^{\alpha''}u.\tag{A.18}$$

对于仿乘法算子与磨光算子 $J_\epsilon$ 的交换子，有如下定理：

**定理 A.17** 设 $a\in C^\rho(R^n)$, $\rho>1$, $u\in H^s(R^n)$, 则有：

(1) $[T_a,J_\epsilon]u\in H^{s+1}(R^n)$, 且有

$$\|[T_a,J_\epsilon]u\|_{s+1}\le C\|u\|_s,\tag{A.19}$$

$$\|[T_a,J_\epsilon]u\|_s\le C\epsilon\|u\|_s,\tag{A.20}$$

其中常数 $C$ 与 $\epsilon$、$s$ 无关.

(2) 当 $\epsilon\to 0$ 时，在空间 $H^{s+1}$ 中有 $[T_a,J_\epsilon]u\to 0$.

设 $l(x,\xi)$ 是关于 $\xi\in R^n$ 的齐 $m$ 次函数，当 $\xi\ne 0$ 时为 $C^\infty$，对于 $x\in\Omega$, 函数 $l$ 关于 $x$ 的各阶导数属于 $C^\rho(\rho>0)$，则对 $l(x,\xi)$ 可以作球面调和分解，写成

$$l(x,\xi)=\sum a_\nu(x)h_\nu(\xi)\tag{A.21}$$

的形式，其中 $a_\nu(x)\in C^\rho$, $h_\nu(\xi)$ 为齐 $m$ 次函数，在 $\xi=\ne 0$ 时属于 $C^\infty$.

**定义 A.3** 对上面给出的函数 $l(x,\xi)$，在作它的球调和分解 (A.21) 后，可以定义一个线性算子

$$T_l u = \sum_\nu T_{a_\nu} h_\nu(D) s(D) u, \qquad (A.22)$$

其中 $T_{a_\nu}$ 是由 $a_\nu$ 导出的仿乘法算子，$h_\nu(D)$、$s(D)$ 为以 $h_\nu(\xi)$、$s(\xi)$ 为性质的拟微分算子，$s(\xi)$ 是在原点邻域为零，在 $|\xi|$ 充分大时恒等于 1 的 $C^\infty$ 函数. 由(A.21)所定义的算子称为以 $l(x, \xi)$ 为象征的仿微分算子.

定义 A.3 中的 $l(x, \xi)$ 可以被替换为具有不同幂次的齐次函数之和. 若 $l(x, \xi)$ 的和表示式中最高幂次项的幂次为 $m$，则记 $l \in \Sigma_\rho^m(\Omega)$，而对相应的仿微分算子 $L$，记为 $L \in O\rho\Sigma_\rho^m(\Omega)$. 这时，$l(x, \xi)$ 的最高次项称为主象征.

**定理 A.18** 按(A.22)所定义的仿微分算子是 $H^s \to H^{s-m}$ 或 $C^\rho \to C^{\rho-m}$ 的线性连续映射. 当定义式(A.22)中 $s(\xi)$ 或在仿乘法算子的定义中引入的 $\kappa$, $\psi(\xi)$, $\phi(\xi)$ 被替换成别的具有相同性质的函数时，所引起的误差是 $\rho - m$ 正则算子.

**定理 A.19** 设 $h(\xi)$ 为 $C^\infty$ 函数，在原点的邻域为 0，且当 $|\xi|$ 充分大时为 $m$ 次齐次函数，又设 $a(x) \in C^\rho$, $\rho > m$，则有

$$h(D) T_a u = \sum_{|\alpha| \le [\rho]} \frac{1}{\alpha!} T_{D^\alpha a} h^{(\alpha)}(D) u + Ru, \qquad (A.23)$$

其中 $R$ 是 $\rho - m$ 正则算子.

**定理 A.20** 设 $l_1(x, \xi)$、$l_2(x, \xi)$ 满足定义 A.3 的条件，关于 $\xi$ 分别为 $m_1$、$m_2$ 次齐次函数，又令

$$l(x, \xi) = (l_1 \# l_2)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le [\rho]} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha l_1 D_x^\alpha l_2, \quad (A.24)$$

则有 $T_{l_1} \circ T_{l_2} = T_l + R$，其中 $R$ 为 $\rho - m_1 - m_2$ 正则算子.

**定理 A.21** 设 $l(x, \xi)$ 满足定义 A.3 的条件，又令

$$l^*(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le [\rho]} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha l(x, \xi), \qquad (A.25)$$

则 $T_l$ 的共轭 $T_l^*$ 是 $H^s \to H^{s-m}$ 的线性连续映射，又 $T_l^* - T_{l^*}$ 为 $H^s \to H^{s-m+\rho}$ 的线性连续映射.

**定理 A.22** 设 $L \in Op\Sigma_\rho^m(\Omega_x)$，其象征为 $l(x, \xi)$，$\psi$ 为 $\Omega_x$ 到 $\Omega_y$ 的同胚映射，则按照 $u \mapsto (L(u \circ \psi)) \circ \psi^{-1}$ 所定义的算子属于 $Op\Sigma_\rho^m(O_y)$，其象征为

$$\sum_\alpha{}' \frac{1}{\alpha!} l^{(\alpha)}(x, {}^t\psi'(x)\eta) D_z^\alpha e^{i<\chi(x,z),\eta>}\bigg|_{z=x=\psi^{-1}(y)}, \quad (A.26)$$

其中 $\chi(x, z) = \psi(z) - \psi(x) - \psi'(x)(z - x)$，$l^{(\alpha)}(x, \xi)$ 表示 $\partial_\xi^\alpha l(x, \xi)$，而 $\sum\limits_\alpha{}'$ 表示所有关于 $\eta$ 的次数不低于 $m - [\rho]$ 的那些项之和.

**定理 A.23** 设 $F(u_1, \cdots, u_N)$是 $R^N$ 上的 $C^\infty$函数，当 $1 \le j \le N$ 时，函数 $u_j(x) \in C^\rho(R_x^n)$，$\rho > 0$（相应地 $H^s(R_x^n)$，$s > \frac{n}{2}$），有

$$F(u_1(x), \cdots, u_N(x)) = \sum_{j=1}^N T_{\frac{\partial F}{\partial u_j}} u_j(x) + R(x), \quad (A.27)$$

其中 $R(x) \in C^{2\rho}$(相应地 $R(x) \in H^{2s-n/2}$). 非线性函数 $F$ 的这种表示称为仿线性化.

当 $F$ 关于它的变元仅有有限阶正则性时，仍有相仿的仿线性化定理. 当然，这时余项的正则性与 $F$ 的正则性也有关.

**定理 A.24** 设 $F(u_1, \cdots, u_N)$在 $R^N$ 中是关于其变元的 $C^\sigma(\sigma>1)$函数，当 $1 \le j \le N$ 时，函数$u_j(x) \in C^{\rho+1}(R_x^n)$，$\rho > 0$，则有

$$F(u_1(x), \cdots, u_N(x))$$
$$= \sum_{j=1}^N T_{\frac{\partial F}{\partial u_j}} u_j(x) + \sum_{k \ge 0} F_k \circ (S_k u) + R(x), \quad (A.28)$$

其中 $F_k$ 为 $F$ 在 $R^N$ 中所作的二进分解，$S_k$ 为在 $R^n$ 中作二进分解时导入的部分和算子. $R(x) \in C^{\rho+1+\epsilon}$，$s = \min(\sigma - 1, \rho + 1)$.

若 $F$ 在 $R^N$ 中为其变元的 $H^s\left(s > \frac{N}{2} + 1\right)$ 函数，$u_j(x) \in H^{r+1}(R^n)$，$r > n/2$，则(A.27)仍然成立，但 $R \in H^{r+1+\epsilon'}$，$\epsilon' =$

$\min\left(s-\frac{N}{2}-1, r-\frac{n}{2}+1\right)$.

利用非线性函数的仿线性化,可以对非线性偏微分方程作仿线性化. 在 $R^n$ 中考虑非线性偏微分方程

$$F(x, u(x), \cdots, \partial^\beta u, \cdots)_{|\beta|\leq m}=0, \tag{A. 29}$$

则有如下的仿线性化定理成立:

**定理 A. 25** 设 $u\in C^{\rho+m}$, $\rho>0$ $\left(\text{或} u\in H^{s+m}, s>\frac{n}{2}\right)$ 是方程(A. 29)的实解,则存在象征为

$$\sigma(P)=\sum_{|\alpha|\leq m}\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(x, \cdots, \partial^\beta u, \cdots)(i\xi)^\alpha\in\Sigma_\rho^m \tag{A. 30}$$

的仿微分算子 $P\in Op\Sigma_\rho^m$, 使得

$$Pu(x)=\sum_{|\alpha|\leq m}T_{\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}}\partial^\alpha u(x)\in C^{2\rho}(\text{或} H^{2s-\frac{n}{2}}). \tag{A. 31}$$

## §3 仿复合算子

以下叙述仿复合算子的概念,它在本质上与定理 A. 22 中所述的非 $C^\infty$ 函数的仿线性化是一致的. 设 $\Omega_{1y}$、$\Omega_{2x}$是两个给定的区域, $\chi: \Omega_1\to\Omega_2$ 是一个 $C^{\rho+1}$ 可逆变换, $\rho>0$. 又设 $u\in\mathscr{E}'(\Omega_2)$, $\mathrm{supp}u\subset K$, 则 $K$ 在变换 $\chi^{-1}$ 下的象 $\chi^{-1}(K)\subset\Omega_1$. 若对于 $u(x)$ 有二进分解

$$u(x)=\sum_{j=-1}^\infty u_j(x),$$

其中 $u_j(x)$满足 $\mathrm{supp}\hat{u}_j\subset\mathscr{C}_j$. 由于相应的对偶变量 $\xi$ 与 $\eta$ 间有关系 $\eta=\langle{}^t\chi'(y), \xi\rangle$, 从而可选取适当大的数 $\tilde{\kappa}>1$, 使对任意的 $y\in\Omega'_1$、$\xi\in\mathscr{C}_j$,有 $\eta\in\tilde{\mathscr{C}}_j=\{\eta; \tilde{\kappa}^{-1}2^j\leq|\eta|\leq\tilde{\kappa}2^{j+1}\}$.

可以定义仿复合算子如下:

**定义 A. 4** 设 $u$ 及 $\chi$ 给定如上,$\psi(y)\in C_0^\infty(\Omega_1)$,且在 $\chi^{-1}(K)$

的邻域上等于 1,作

$$\chi^* u = \sum_k [\psi(u_k \circ \chi)]_k, \tag{A.32}$$

其中$[\cdot]$的意义为 $[v]_k = \sum_j v_j$, 而和式的足标 $j$ 取遍使 $v_j$ 的谱与二进环体 $\mathscr{C}_k$ 相交的那些项. 线性算子 $\chi^*$ 即称为仿复合算子.

在 $\chi \in C^{\rho+1}$, $\rho > 0$ 的条件下,仿复合算子是$C^\sigma$ 到 $C^\sigma$ 的连续映射(若 $\sigma \neq 0$), 也是 $H^s$ 到 $H^s$ 的连续映射. 在仿复合算子的定义中,不同的二进环体的选取与不同的二进分解方法的选取仅导致 $\rho$ 正则算子的误差. 关于仿复合算子的主要性质有以下的定理:

**定理 A. 26** 设 $\chi: \Omega_1 \to \Omega_2$ 是一个 $C^{\rho+1}$ (相应地, $H^{r+1}$) 可逆变换, $\rho > 0$ (相应地, $r > \frac{n}{2}$), 又设 $u \in C^\sigma(\Omega_1)$, $\sigma > 1$(相应地, $u \in H^s(\Omega_1)$, $s > \frac{n}{2} + 1$), $u$ 在 $\Omega_2$ 中有紧支集, $\psi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ 在 $\chi^{-1}$ (supp$u$)的邻域上为 1,则

$$u \circ \chi = \chi^* u + T_{u' \cdot \chi}(\psi(\chi)) + R, \tag{A.33}$$

式中 $R \in C^{\rho+1+\varepsilon}$, $\varepsilon = \min(\sigma - 1, \rho + 1)$ $\left(\text{相应地}, R \in H^{r+1-\varepsilon'}, \varepsilon' = \min\left(s - \frac{n}{2} - 1, r - \frac{n}{2} + 1\right)\right)$.

**定理 A. 27** 设 $\chi_1: \Omega_1 \to \Omega_2$ 及 $\chi_2: \Omega_2 \to \Omega_3$ 是两个 $C^{\rho+1}$ 类的可逆变换, $\rho > 0$, $u \in C^\sigma(\Omega_3)$ 或 $H^s(\Omega_3)$, supp$u \subset K$ 是紧集. 又 $\psi \in C_0^\infty(\Omega_2)$,且在 $\chi_2^{-1}(K)$ 的邻域上为 1,则

$$\chi_1^* \psi \chi_2^* u = (\chi_2 \chi_1)^* u + Ru, \tag{A.34}$$

其中 $R$ 是 $\rho$ 正则算子.

**定理 A. 28** 设 $\chi_1: \Omega_1 \to \Omega_2$ 是 $C^{\rho+1}$ 类的可逆变换, $\rho > 0$, $u \in C^\sigma(\Omega_2)$ 或 $H^s(\Omega_2)$, supp$u \subset K$ 是紧集. 又设象征 $a(x, \xi) \in \Sigma_\rho^m(\Omega_2)$, 相应的仿微分算子为 $T_a$,则存在算子 $\widetilde{T}_a$,使得

$$\chi^* T_a u = T_{\tilde{a}} \chi^* u + Ru, \tag{A.35}$$

其中$\tilde{a}(y, \eta) \in \Sigma_\varepsilon^m(\Omega_1)$，$\varepsilon = \min(\alpha, \rho)$，$R$ 是 $\varepsilon - m$ 正则算子.

**定理 A. 29** 设 $\chi: \Omega_1 \to \Omega_2$ 是一个 $C^{\rho+1}$，$\rho > 0$（相应地，$H^{r+1}$，$r > \frac{n}{2}$）可逆变换，对于 $1 \leq j \leq N$，实函数 $u^j(x) \in C^\sigma(\Omega_2)$，$\sigma > 1$（相应地，$H^s$，$s > \frac{n}{2} + 1$），又 $F(u_1, \cdots, u_N)$是 $R^N$ 上的 $C^\infty$ 函数，则有下式成立：

$$\chi^* F(u) = T_{F'(u \circ \chi)} \chi^* u + R, \tag{A.36}$$

式中 $R \in C^\varepsilon$，$\varepsilon = \min(2\rho + 2, \rho + \sigma, 2\sigma)$ $\Big($相应地，$R \in H^\varepsilon$，$\varepsilon = \min\Big(2r - \frac{n}{2} + 2, \rho + s - \frac{n}{2}, 2s - \frac{n}{2}\Big)\Big)$.

也可以通过用一系列紧集逼近开集的作法，引入更广泛意义的仿复合算子，它能用于讨论非 $C^\infty$ 变换与不具有紧支集的分布的复合，并在相仿的意义下有以上诸定理成立. 这里从略.

# 参考文献

[1] Alinhac S. Evolution d'une onde simple pour des equations non-linéaires generales. Corrent Topics in P D E, Kinekuniya Co. Japan, 1985, 63~90

[2] Alinhac S. Paracomposition et operateurs paradifferentiels. Comm. PDEs, 1986. 11:87~121

[3] Alinhac S. Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non-linéaires. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 1988, 21:91~132

[4] Alinhac S. Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. Comm. in PDEs, 1989, 14:209~246

[5] Alinhac S. Blow up for nonlinear hyperbolic equations. Birkhaus Boston. Basel, Berlin, 1995

[6] Beals M. Spreading of singularities for a semi-linear wave equation. Duke Math. J., 1982, 49:275~286

[7] Beals M. Self-spreading and strength of singularities for solutions to smilinear wave equations. Ann. of Math., 1983, 118:187~214

[8] Beals M. Nonlinear wave equations with data singular at one point. Comtemp. Math., 1984, 27:83~95

[9] Beals M. Propagation of smoothness for nonlinear second-order strictly hyperbolic differential equations. Proc. Symp. in Pure Math., 1985, 43:21~44

[10] Beals M. Interaction of radially smooth waves, Lecture Notes in Math., 1986, 1256:1~27

[11] Beals M. Presence and absence of weak singularities in nonlinear waves. Dynamical Problems in Continuum Physics, Springer-Verlag, N. Y., 1987, 23~41

[12] Beals M. Singularities of conormal radially smooth solutions to nonlinear wave equations. Comm. in PDEs, 1988, 13:1355~1382

[13] Beals M. Vector fields associated with the nonlinear interaction of progressing waves, Indiana Univ Math. 1988, 37:637~665

[14] Beals M. Propagation and interaction of singularities in nonlinear hyperbolic problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 3. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989

[15] Bezard M. Probelme de Riemann generalise pour un systeme de lois de conservation raiment non lineaire multidimensionnel. Journées "Équations aux Dérivees Partielles", Saint Jean de Monts, 1990, no. 17

[16] Bony J M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les equations aux dérivees nonlinéaires, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 1981, 14:209～246

[17] Bony J M. Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles nonlinéaires, Sém. Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1979～1980, no. 22

[18] Bony J M. Interaction des singularités pour les équation aux dérivées partielles nonlinéaries. Sem. Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1980～1981, no. 2

[19] Bony J M. Interaction des singularités pour les équations de klein-Gordon nonlinéaires. Sem. Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1983～1984, no. 10

[20] Bony J M. Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations. Tanikuchi Symp., Katata, 1984, 11～49

[21] Bony J M. Singularités des solutions des problémes de Cauchy hyperboliques nonlinéaires. Advances in Microlocal Analysis, 1986, 15～34

[22] Bony J M. Analyse microlocale et singularités nonlinéaires, Lecture Notes in Math, 1989, 1402: 114～127

[23] Bony J M. Analyse microlocale des équations aux dérivées partielles. Lecture Notes in Math, 1991, 1495: 1～45

[24] Bahouri H & Dehman B. Propagation des singularités Höldériennes de solutions d'équations non-linéaires. J. Math. et Appl, 1988, 67: 115～130

[25] Bony J M & Lerner L. Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur, I. Ann. Se. Ec. Norm. Sup., 1989, 22: 377～433

[26] Beals M & Métivier G. Progressing wave solution to certain nonlinear mixed problems. Duke Math J., 1986, 53: 125～137

[27] Beals M & Métivier G. Reflection of transversal progressing waves in nonlinear strictly hyperbolic mixed problems. Amer. J. Math, 1987, 109: 335～360

[28] Beals M & Reed M. Propagation of singularities for hyperbolic pseudodifferential operators with non-smooth coefficients. Comm Pure Appl. Math, 1982, 35: 169～184

[29] Beals M & Reed M. Microlocal regularity theorems for non-smooth pseudodifferential operators and applications to non-linear problems., Trans. Amer Math Soc., 1984, 285: 159～184

[30] Chazarian J. Propagation des singularités pour classe d'opérateurs a caractéristiques multiples et résobulité locale., Ann Inst Fourier, 1974, 24: 203～223

[31] Chazarian J. Reflection of $C^{\infty}$ singularities for a class of operators with

multiple characteristics. , Publ. RIMS, Kyoto Univ,1977,12s:39～52

[32] Chemin J Y. Interaction de trois ondes dans les équations semilinéaires strictement hyperboliques d'ordre 2. Comm. in PDEs,1987,12:1203～1225

[33] Chemin J Y. Interaction controôleé dans les équations aus dériveés partialles nonlinéaires, Bull. Soc. Math. France,1988,116:341～383

[34] Chemin J Y. Calcul paradifferentiel précisé et applicationsà des équations aux dérivées partielles non semilinéaires. Duke Math J, 1988,86:431～469

[35] Chemin J Y. Régularité de la solution d'un problem de Cauchy fortement nonlinéaire à données singularités en un point. Ann Inst. Fourier, 1989,39:101～121

[36] Chemin J Y. Evolution d'une singularité punctuelle dans un fluids compressible. Comm in PDEs,1990,15:1237～1264

[37] Chemin J Y. Evolution d'une singularité pouctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires. Amer J Math,1990,112:805～860

[38] 陈恕行. 偏微分方程概论. 北京:高等教育出版社,1981

[39] 陈恕行. 拟线性对称双曲组具有特征边界的初边值问题,数学年刊,1982,3卷2期:223～232

[40] Chen S X. Pseudodifferential operators with finitely smooth symbols and their applications to quasilinear equations. Nonlinear Analysis TMA, 1982,11:1193～1206

[41] 陈恕行. 高维半线性波动方程解的正则性估计. 中国科学A辑,1984,27卷4期:328～337 (英文版,Ser A, 27:924～935)

[42] Chen S X. The reflection and interaction of the singularities of solutions to semilinear wave equation in higher space dimension. Nonlinear Analysis TMA,1984, 10:1167～1179

[43] Chen S X. Propagation of anomalous singularities of solutions to a semilinear hyperbolic equation of higher order. Northestern Math J, 1985,1:127～137

[44] Chen S X. Regularity and singularity of solution for nonlinear hyperbolic equations. Advances in Science of China, Mathematics,1986,1:129～162

[45] Chen S X. Regularity estimate of solutions to semilinear hyperbolic equations in higher space dimension. Acta Math Sinica,1987,3:66～76

[46] Chen S X. Smoothness of shock front solution for systems of conservation laws, Lecture Notes in Math,1988,1306:38～60

[47] Chen S X. Piecewise smooth solutions of semilinear systems in higher space dimension. Chin Ann Math,1989,10B:361～370

[48] Chen S X. Reflection and interaction of progressing wave for semilinear wave equations. Jour Math Anal Appl,1990,153:562～575

[49] 陈恕行. 非线性偏微分方程的奇性分析. 数学进展,1990,19 卷 3 期:284～300

[50] Chen S X. Multidimensional Riemann problem for semilinear wave equation. Comm in PDEs,1992,17:715～736

[51] Chen S X. Cauchy problem for a class of semilinear hyperbolic equation with Y-shape discontinuous data, Acta Mathematica Sinica, New series,1995,11(special issue):171～185

[52] 陈恕行. 拟微分算子. 北京:高等教育出版社,1995

[53] Chen S X. Propagation of Singularities and Second Microlocalization. Pitman Research Notes in Math Ser,1996,349:183～208

[54] Chen S X. Solution to nonlinear wave equation with delta initial data and its singularity structure. Journal of PDEs,1996,9:301～312

[55] Chen S X. On interaction of shock and sound wave (Ⅰ),(Ⅱ), Chin Ann Math,1996,17B:35～42; 445～456

[56] Chen S X & Fang D Y. The Cauchy problem for semilinear hyperbolic equations with cross discontinuous data. Acta Math Sinica, New Ser,1995,11:113～120

[57] 陈恕行,仇庆久,李成章. 仿微分算子引论. 北京:科学出版社,1990

[58] Chen S X & Wang Y G. The Cauchy problem for gas dynamic systems in multi-dimensional space with weakly singular data. Chin, Ann, Math,1992,13:298～314

[59] Chen S X & Zhang Z B. On the generation of shock waves for first order quasilinear equation. Fudan Journal (Natural Science),1963,1:13～22

[60] Courant R & Friedrichs K O. Supersonic flow and shock waves, Springer-Verlag, New York,1976

[61] Courant R & Hilbert D. Methods of mathematical physics, v. 2, Interscience, N Y,1962

[62] Chazarian J & Piriou A. Introduction to the theory of linear partial differential equations. North-Holland Pub Co Amsterdam,1982

[63] Chen H & Rodino L. General theory of PDEs and Gevrey Class. Pitman Research Notes in Math Ser,1996,349:6～81

[64] Delort J M. Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques. Sém E D P Ecole Polytechnique,1988～1989, no. 24

[65] Duistermaat J J & Hömander L. Fourier integral operators II. Acta Math. 1972,128:183～269

[66] David F & Williams, Singularities of solutions to semilinear boundary value

problems. Amer J Math, 1987, 109; 1087~1109

[67] Fang D Y. Triple interaction of conormal waves for higher order semilimear hyperbolic equations. Chin Ann Math, 1995, 16B; 23~32

[68] Fang D Y. The Cauchy problem for nonlinear hyperbolic equations with discontinuous data. Nonlinear Analysis TMA, 1995, 24; 677~691

[69] Fang D Y. Nonlinear superposition of delta waves in multidimensional space. Jour. PDEs 1992, 5: 72~84

[70] Garding L. Singularities in linear wave propagation. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1987, no. 1241

[71] Gerard P. Solutions conormales analytiques d'équations hyperbolique nonlinéaires. Comm in PDEs, 1988, 13: 345~377

[72] Godin P. Propagation of $C^{\infty}$ reqularity for fully nonlinear second order strictly hyperbolic equations in two variables. , Trans. Amer Math Soc, 1985, 290: 825 ~830

[73] Godin P. Propagation of analytic regularity for analytic fully non-linear second order strictly hyperbolic equations in two variables. Comm in PDEs

[74] Gramchev T. Semilinear hyperbolic systems and equations with singular initial data. Monatshefte fur Mathematik, 1991, 112: 99~113

[75] Gerard P & Rauch J. Propagation de la regularité de solutions hyperboliques nonlinéaires. Ann Inst Fourier, 1987, 37: 65~84

[76] Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in partial differential equations. New York: Dover Publ, 1952

[77] Hanges N. Propagation of singularities for a class of operators with double characteristics. Ann of Math Study, Princeton Univ Press, 1979, 113~126

[78] Hörmander L. Fourier integral operators I. Acta Math, 1971, 127: 79~183

[79] Hörmander L. On the existence and the regularity of solutions of linear pseudodifferential equations. Ens Math, 1971, 17: 99~163

[80] Hörmander L. Spectral analysis of singularities. Ann of Math. Study, Princeton Univ Press, 1979, 3~50

[81] Hörmander L. The analysis of linear partial defferential operator, (Ⅰ)~(Ⅳ). Springer-Verlag, 1985

[82] Kohn U J & Nirenberg L. An algebra of pseudodifferential operators. Comm Pure Appl Math, 1965, 18: 269~305

[83] Lascar B. Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. CRAS Paris, 1978, 287: 527~529

[84] Lax P D. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Duke

Math J, 1957,24:627～646

[85] Lebeau G. Probléme de Cauchy semilinéaire en 3 dimensions d'espace. Un résultat de finitude. J Funct Anal,1988,78:185～196

[86] Lebeau G. Equations des ondes semilineaires Ⅱ. Contrôle des singularités et caustiques non linéaires. Invent Math,1989, 95:277～323

[87] Li D N. Rarefaction and shock waves for multi-dimensional hyperbolic conservation laws. Comm in PDEs,1991,15:425～450

[88] Liu L Q. Propagation of singularities for solution of semilinear wave equation. Chin Ann Math,1988,9B:379～389

[89] Li T T & Yu W C. Boundary value problems for hyperbolic systems. Duke Univ Math Ser V,1995

[90] Majda A. The existence of multi-dimensional shock fronts. Memoirs AMS, 1983,no. 283

[91] Melrose R. Microlocal parametrics for diffractive boundary value problems. Duke Math J,1975,42:605～635

[92] Melrose R. Conormal rings and semilinear wave equations. Advances in Microlocal Analysis,1986,225～251

[93] Melrose R, SáBarreto A, Zworski M. Semi-linear diffraction of conormal waves. Astérisque, 1996, no. 240

[94] Métivier G. The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data. Duke Math J,1986,53:983～1011

[95] Métivier G. Interaction de deux chocs pour un systeme de deux lois conservation, en dimension deux d'espace. Trans Amer Math Soc,1986,296:431～479

[96] Métivier G. Propagation, Interaction and reflection of discuntinuous progressing waves for semilinear hyperbolic systems. Amer J Math,1989,111:239～287

[97] Métivier G. Ondes discontinués pour les systèmes hyperboliques semilineaires. Pitman Research Notes in Math. Ser. 183:159～169

[98] Métivier G. Ondes soniqes, J Math Pures et Appl, 1991,70:197～268

[99] Métivier G & Rauch J. The interaction of two progressing waves. Lecture Notes in Math,1989,1402:216～226

[100] Melrose R & Ritter N. Interaction of progressing waves for semilinear wave equation I, Ann of Math,1985,121:187～213

[101] Melrose R & Ritter N. Interaction of progressing waves for semilinear wave equation Ⅱ, Arkiv för Math. 1987,91～114

[102] Melrose R & Sjöstrand J. Singularities of boundary value problems I,II.

Comm Pure Appl Math,1978,31:593～617,1982,35:129～168

[103] Nirenberg L. Lectures on partial differential equations. Regional Conference Series 17, Amer Math Soc,1973

[104] Oberguggenberger M & Wang Y G. Delta-waves for semilinear hyperbolic Cauchy problems, Mathematishe Nachshrift. 1994,166:317～327

[105] Oberguggenberger M & Wang Y G. Reflection of delta-waves for nonlinear wave equations in one space variable. Nonlinear Anal,1994,22:983～992

[106] 齐民友. 线性偏微分算子引论(上册). 北京:科学出版社,1984

[107] Qiu Q J. Application of para-Fourier integral operators to propagation of nonlinear singularities, Science in China,1990,33:1060～1071

[108] 仇庆久,陈恕行等. 傅里叶积分算子理论及其应用. 北京:科学出版社,1985

[109] 齐民友,徐超江. 线性偏微分算子引论(下册). 北京:科学出版社,1992

[110] 齐民友,徐超江,王维克. 现代偏微分方程引论. 武汉:武汉大学出版社,1994

[111] Rauch J. Singularities of solutions to semilinear wave equations. J Math Pures et Appl,1979,58:299～308

[112] Rauch J. & Reed M. Discontinuous progressing waves for semilinear systems. Comm in Math Phys,1981,81:203～227

[113] Rauch J & Reed M. Singularities produced by the nonlinear interaction of three progressing waves,example. Comm PDEs,1982,7:1117～1133

[114] Rauch J. & Reed M. Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension, Duke Math J,1982,49:397～475

[115] Rauch J & Reed M. Ray-like solutions of semilinear wave equations, Contem Math,1984,27:107～117

[116] Rauch J & Reed M. Discontinuous progressing waves for semilinear systems. Comm in PDEs,1985,10:1033～1075

[117] Rauch J & Reed M. Striated solutions of semilinear two speed wave equations. Indiana Math J,1985,34:337～353

[118] Rauch J & Reed M. Nonlinear Superposition and absorption of delta waves in one space dimension. J Funct Anal,1987,73:152～178

[119] Rauch J & Reed M. Classical conormal solutions of semilinear systems. Comm in PDEs,1988,13:1297～1335

[120] Sablé-Tougeron M. Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non-linéaires. Ann Inst Fourier,1986,36:39～82

[121] Sablé-Tougeron M. Ondes de gradients multidimensionnelles. Memoirs AMS,1993,no. 511

[122] Sá Barreto A. Interactions of conormal waves for fully semilinear wave

equations. Jour Funct Anal, 1990, 89: 233~273

[123] Sá Barreto A. Second microlocal ellipticity and propagation of conormality for semilinear wave equations. Jour Funct Anal, 1991, 102: 47~71

[124] Sjöstrand J. Singularités analytiques microlocales. Astéristique, 1982, no. 95

[125] Smoller J. Shock waves and reaction-diffusion equations. Springer-Verlag, New York, Heideiberg, Berlin, 1982

[126] Taylor M. Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations. Comm Pure Appl Math, 1975, 28: 457~478

[127] Taylor M. Grazing rays and reflection of singularities to wave equations. Comm Pure Appl Math, 1976, 29: 1~38

[128] Taylor M. Pseudo-differential operators. Princeton Univ Press, Princeton, 1981

[129] Taylor M. Pseudodifferential operators and nonlinear PDEs. Progress in Math, 100, Birshauser, 1991

[130] Treves F. Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators, Plenum Press, N Y. 1981.

[131] Wang W. K. interaction of conormal waves with different singularities for semi-linear equations. Jour PDEs, 1991, 4: 87~96

[132] 王维克. 非线性偏微分方程不同奇性的弱奇性波的干扰, 数学年刊, 1993, 14 (A): 38~45

[133] Wang W. K. Interaction of shock and conormal singularities for conservation laws. Comm in PDEs, 1994, 19: 1037~1073

[134] Wang Y G. The semilinear second-order hyperbolic equation with data strongly singular at one point. Monatshefte für Math, 1994, 117: 285~302

[135] Williams M. Spreading of singularities at the boundary in semilinear hyperbolic mixed problems I: microlocal $H^{s,s'}$ regularity. Duke Math J, 1988, 56: 17~40

[136] Williams M. Spreading of singularities at the boundary in semilinear hyperbolic mixed problems Ⅱ: crossing and self-spreading. Trans AMS, 1988, 310

[137] Xu C J. Régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires associées à un système de champs de vecteurs. Ann Inst Fourier, 1987, 37: 105~113

[138] Xu C J. Propagation au bord des singularités pour des problème de Direchlet non linéaires d'ordre deux. Jour Funct Anal, 1990, 92: 224~247

[139] Yu Y N. Singularities of solutions to Cauchy problems for semilinear wave

equations in two space dimensions. Jour PDEs,1990,3:69～80

[140] Yu Y N. Reflection of progressing waves for quasilinear hyperbolic systems, Jour PDEs,1991. 4:61～73

[141] Yin H C & Qiu Q J. Tangent interaction of cornomal waves for second order full nonlinear strictly hyperbolic equations, Nonlinear anal,1992,19:81～93

[142] Zhang Y Q. On the Cauchy problem for a class of semilinear hyperbolic equations with discontinuous coefficients and data. Jour PDEs,1996,9:209～220

[143] Zwors ki M. An example of new singularities in the semiliner interaction of a cusp and a plane. Comm in PDEs, 1996, 21:901～909